Exercice 1 *(e3a-CCP)*

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

   (b) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, démontrer que
   $$\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{q+1}$$

   (c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Dans cete question, a est un réel fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{a^n}{n(n+1)}$

   (a) Dans le cas $|a| \leq 1$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente.

   (b) Dans le cas $|a| > 1$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ est divergente.

3. Pour $k \geq 1$, on note $R_k = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

   (a) Que représente R_k pour la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$?

   (b) Calculer kR_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Quelle est la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 1} kR_k$?

Problème 1 *(e3a-CCP)*

Partie I

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. (a) Calculer $f(e_1)$, $f^2(e_1) = f \circ f(e_1)$.

   (b) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est liée.

2. Montrer de même que la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est liée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
5. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Partie II

On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$, pour $d \in \mathbb{N}$ fixé.
Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence apr :

$$\begin{cases} & x_0 = x \\ \forall n \geq 0, & x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

et on note $E_x = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{ \left(\sum_{n=0}^{d-1} \lambda_n x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \; ; \; d \in \mathbb{N}^*, (\lambda_n)_{0\leq n\leq d-1} \in \mathbb{R}^d \right\}$, l'ensemble des combinaisons linéaires **finies** des éléments de la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $f(E_x) \subset E_x$, c'est à dire que E_x est stable par f.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.
3. Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ est une famille libre.
   (a) Justifier l'existence d'un tel entier p.
   (b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que $x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$.
   (c) On note $E'_x = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((x_0, \ldots, x_{p-1}))$. Montrer que E'_x est stable par f.
   (d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathcal{B}_p = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x.
4. On note $\hat{f} = f_{|E_x}^{|E_x}$ l'endomorphisme de E_x induit par f sur E_x, c'est à dire l'endomorphisme défini par :

   $$\hat{f} : \begin{array}{ccc} E_x & \longrightarrow & E_x \\ v & \longmapsto & f(v) \end{array}.$$

   Donner la matrice de $\hat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
5. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}, \hat{f}, \hat{f}^2, \ldots, \hat{f}^{p-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E_x)$.
6. (a) Montrer que pour tout $k < p$,

   $$\hat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \hat{f}^{p-1}(x_k).$$

   (b) En déduire que l'on a $\hat{f}^p = a_0 \mathrm{Id} + a_1 \hat{f} + \cdots + a_{p-1} \hat{f}^{p-1}$