Exercice 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $f \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$ l'application linéaire canoniquement associée, c'est à dire telle que : $f(V) = MV,\ \forall V \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. Au vu des vecteurs colonnes de M, démontrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
2. Expliciter $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer le noyau de f.
4. La somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ est-elle directe ?
5. Calculer $\det(M)$, à l'aide d'un calcul par blocs.
6. Au vu des deux dernières colonnes de M, trouver un sous-espace vectoriel F de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ stable par f.
7. En calculant $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, démontrer que la droite D dirigée par $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est stable par f.

Exercice 2

Soient $I = [0, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{n}{1 + n(1+t)}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur I vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers f.
3. Démontrer que la suite numérique $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{n}{1 + n(1+t)}\mathrm{d}t\right)_{n\geq 0}$ converge vers une limite finie L que l'on calculera explicitement.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : x \mapsto |x|$.
2. Montrer que $(g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. $g = \lim\limits_{n} g_n$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?