Problème 1

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathcal{B}$. Soient p l'application $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $p((x,y,z,t)) = \left(\frac{x}{2}+\frac{z}{2}, y, \frac{x}{2}+\frac{z}{2}, t\right)$ et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^4$ ayant dans la base $\mathcal{B}$ la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question, nous étudions l'application p.
   (a) Montrer que p est une application linéaire.
   (b) Donner la matrice P de p dans la base canonique $\mathcal{B}$.
   (c) Calculer P^2.
2. Dans cette question, nous étudions la matrice S et l'endomorphisme s.
   (a) Calculer S^2 .
   (b) Montrer que s est une symétrie.
   (c) Déterminer $E_{-1} = \mathrm{Ker}(-\mathrm{id} - s) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} + s)$, et expliciter un vecteur u_1 dont la première composante dans la base $\mathcal{B}$ est -1 et tel que $E_{-1} = \mathrm{Vect}(u_1)$.
   (d) Déterminer $E_1 = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - s)$, et expliciter trois vecteurs u_2, u_3 et u_4 (linéairement indépendants) formant une base de E_1. On les choisira avec des composantes égales à 1 ou 0.
   (e) Ecrire la matrice de s dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), et en déduire une matrice inversible U et une matrice diagonale D telles que $S = UDU^{-1}$ On ne demande pas de calculer U^{-1}.
   (f) Calculer S^{2023} .
3. Dans cette partie, nous caractérisons les espaces $F = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Montrer que si $v \in F$ et $w \in G$ alors v et w sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.
   (c) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
4. Dans cette partie, nous cherchons à caractériser l'application linéaire p.
   (a) Calculer p^2.
   (b) Calculer $p(u_1), p(u_2), p(u_3)$ et $p(u_4)$.
   (c) Donner une matrice inversible V et une matrice diagonale A telles que $P = VAV^{-1}$. On ne demande pas de calculer V^{-1}.
   (d) Caractériser géométriquement l'application linéaire p.