Problème 1 *Séries*

Partie I

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$.

1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\, dt$ existe et donner sa valeur.

2. Etude de la fonction H

   (a) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.

   (b) Montrer que H est monotone sur D_H.

   (c) Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} H(x_n)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$.

   on pourra utiliser que la fonction $g \;:\; t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{t-1}$ *est bornée par une constante* M *que l'on ne cherchera pas à expliciter*

   (d) Démontrer que

   $$\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

   (e) En admettant que H est continue en 0, déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

   (f) Soit $x > -1$.

      i. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.

      ii. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

      $$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$

      iii. En déduire que

      $$H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

      iv. On admet que $H(0) = \dfrac{\pi^2}{6}$, calculer $H(1)$.