Exercice 1 *Suite de fonctions*

1. Pour $n \geq 1$, on pose
$$f_n : t \longmapsto \frac{n}{t+(1+t^2)n}.$$
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $I = \mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Justifier que pour tout $n \geq 1$, et tout $t \geq 0$, $|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.
3. La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$?
4. En déduire que que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{t+(1+t^2)n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 *Séries de foncttions*

1. Justifier que l'on définit bien une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}.$$
2. Déterminer l'ensemble de définition de $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de $\psi : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{nx}}{n!}$

Exercice 3

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-2\ln(t)}} = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sqrt{-\ln(t)}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier le changement de variable $x = (\cos t)^n$ dans l'intégrale $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n(t^{-2/n}-1)}}$ converge simplement vers la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{-2\ln(t)}}$, et en déduire, grâce au théorème de convergence dominée, que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$