

**Exercice 1**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)}{nx + 1} e^{-x}$$

1. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit ainsi une fonction  $f_n$  continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. Justifier que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$  vers une fonction limite  $f$ , dont on donnera l'expression en tout point.
3. Soit  $a > 0$ . On s'intéresse à la convergence uniforme sur  $[0, a]$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x) - f(x)| = \frac{(x^2 + 1)e^{-x}}{nx + 1}$ .
  - (b) En déduire que  $\|f_n - f\|_{\infty, [0, a]} \geq 1$ .
  - (c) La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément vers  $f$  sur  $[0, a]$ ?
4. On suppose toujours  $a > 0$ . On s'intéresse à la convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $(1 + x^2)e^{-x} \leq 1$ .
  - (b) En déduire que pour tout  $x \geq a$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{na + 1}$ .
  - (c) Montrer que  $\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{(na + 1)}$ .
  - (d) En déduire que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément vers  $f$  sur  $[a, +\infty[$ .
5. Justifier que la suite  $\left( \int_1^{+\infty} f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite que l'on exprimera sous la forme d'une intégrale.

**Exercice 2**

On considère la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

1. Quelle est la nature de cette série ?
2. Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , rappeler l'expression du reste  $R_N$  d'ordre  $N$ .
3. Déterminer à l'aide du critère spécial des séries alternées un entier  $N_0$  tel que  $|R_{N_0}| \leq 10^{-6}$ .
4. Ecrire une fonction Python `approche(err)` qui prend comme argument un réel `err` strictement positif et renvoie un couple  $(N_0, S_{N_0})$ , tel que  $S_{N_0}$  est une valeur approchée de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  à `err` près.

*Note : vous ferez TRÈS attention à l'indentation, et à la syntaxe précise des fonctions, et des structures de contrôle en Python*