Exercice 1

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n \geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim_{n \to +\infty} J_n$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.