Problème 1 *étude de séries de fonctions*

1. Un premier exemple.

1.1. Pour tout $x \in]-1,1[$, calculer $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

1.2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$, $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$, $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F'(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)^2 F'(x)$.

2. Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout $x \in]-1,1[$, on pose cette fois : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

2.1. Soit $a \in]0,1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a,a]$.
En déduire que F est définie et continue sur $]-1,1[$.

2.2. On admet que : $\forall x \in]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leqslant n$.
En déduire $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x)$.

indication : On pourra montrer que $F(x) \geq \dfrac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$, *pour tout* $x \in]0,1[$.

3. Dans cette question, f est une application réelle continue et croissante sur $[0,1[$ avec $f(0)=0$ et telle que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0,1[$.
Soit $x \in]0,1[$.

3.1. Justifier l'existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t)\mathrm{d}t$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$.

3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t)\mathrm{d}t \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\mathrm{d}t.$$

3.3. En déduire l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

3.4. Conclure avec soin que $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x\to 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$.

4. Un dernier exemple.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

4.1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

Fin de l'énoncé