Exercice 1

On rappelle les formules de trigonométrie que l'on pourra utiliser sans les redémontrer :

$$2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q) \quad \text{et} \quad 2\sin(p)\cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

Soit α un réel non nul fixé.

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $C : x \mapsto \sum_{n \geqslant 0} u_n(x)$.

2. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ sur $\mathscr{D}$.

3. Donner pour tout $x \in \mathscr{D}$ une expression de $C(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Pour tout entier naturel n, on note :

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x$$

4.1 Calculer J_n puis I_n.

4.2 Déterminer $\lim_{n \to +\infty} J_n$ et $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

5. On pose enfin, lorsque cela existe, $S(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S et donner une expression de $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Correction. Exercice 1 : e3a mp 1 2019

Q1 : On a $u_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ donc $|u_n(x)| \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ terme général de la série exponentielle qui converge pour toute valeur de α donc $\sum |u_n(x)|$ converge. On en déduit que $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Q2 : D'après ce qui précède, $\|u_n\|_\infty \leq \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ converge donc la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Q3 : Posons $v_n(x) = \dfrac{\alpha^n e^{inx}}{n!} = \dfrac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}$. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \exp\left(\alpha e^{ix}\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Re}(v_n(x)) = u_n(x)$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(\alpha e^{ix}\right)\right)$. Or $\exp\left(\alpha e^{ix}\right) = \exp(\alpha\cos(x) + i\alpha\sin(x)) = e^{\alpha\cos(x)} e^{i\alpha\sin(x)}$ donc $C(x) = e^{\alpha\cos(x)}\cos(\alpha\sin(x))$.

Q4.1 : On a $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, C(x)\, dx$ et $x \mapsto \sin(nx)\, C(x)$ est impaire car C est paire donc $J_n = 0$. On a $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(nx)\, u_k(x)\, dx$. On pose $w_k(x) = \cos(nx)\, u_k(x)$. On a $\|w_k\|_\infty \leq \|u_k\|_\infty$ donc la série de fonctions $\sum w_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et les fonctions w_k sont continues. On en déduit que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\, dx$. Or, $w_k(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)\cos(kx)}{k!} = \dfrac{\alpha^n}{2k!}\left(\cos\left(k+n\right)(x) + \cos\left(k-n\right)(x)\right)$ donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} w_k(x)\, dx = 0$ si $k \neq n$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} w_n(x)\, dx = \frac{\alpha^n}{2n!}\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = \frac{\alpha^n \pi}{n!}$ donc $I_n = \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$.

Q4.2 : On a $J_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (car $\sum \dfrac{\alpha^n \pi}{n!}$ converge).

Q5 : On a $\cos^2(nx) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ donc $\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \dfrac{\alpha^n}{2n!} + \dfrac{\alpha^n \cos(n\times 2x)}{n!}$. Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{2n!} = \frac{e^\alpha}{2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(n\times 2x)}{n!} = C(2x)$ donc la série $\sum \dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ converge et $S(x) = \dfrac{e^\alpha}{2} + e^{\alpha\cos(2x)}\cos(\alpha\sin(2x))$.