Exercice 1

Soient deux nombres réels strictement positifs a et b, ainsi que les matrices :
$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $\mathscr{E} = \left\{\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), +, .)$ et donner sa dimension en justifiant la réponse.
2. Montrer que la matrice $\mathbf{K}$ admet trois valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ que l'on calculera.
3. La matrice $\mathbf{K}$ est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. (a) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathscr{U}_1$ associé à la valeur propre λ_1. Donner u_1 le vecteur propre de $\mathscr{U}_1$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
   (b) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathscr{U}_2$ associé à la valeur propre λ_2. Donner u_2 le vecteur propre de $\mathscr{U}_2$ dont la deuxième composante vaut 1.
   (c) Déterminer le sous espace vectoriel propre $\mathscr{U}_3$ associé à la valeur propre λ_3. Donner u_3 le vecteur propre de $\mathscr{U}_3$ dont la première composante vaut $\sqrt{a}$.
5. Montrer qu'il existe une matrice $\mathbf{P}$ inversible et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{K} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Donner $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$.
6. Pour i valant 1 ou 2 ou 3, montrer que les vecteurs propres u_i de $\mathbf{K}$ associés aux valeurs propres λ_i sont aussi vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$ associés aux valeurs propres μ_i que vous exprimerez en fonction de α, β, λ_i
7. (a) Montrer que toute matrice $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{I}$ est diagonalisable et donner une matrice diagonale Δ semblable à M.
   (b) Montrer que $\mathbf{M} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P}^{-1}$ avec le même $\mathbf{P}$ qu'à la question 5.
8. On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Utiliser ce qui précède pour déterminer une matrice Δ et une matrice $\mathbf{Q}$ inversible telles ques $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Delta\mathbf{Q}^{-1}$.
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de la puissance n-ième $\mathbf{A}^n$ de $\mathbf{A}$.