Problème 1 *Polynômes annulateurs*

1. Etant donnés E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, rappeler la définition de polynôme annulateur de l'endomorphisme f.

2.(a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\ m_{ij} = \dfrac{1+(-1)^{i+j}}{2}$.

(b) Expliciter la matrice M.

(c) Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(d) En déduire un polynôme π unitaire de degré 2 et annulateur de M.

3.(a) Chercher les solutions des équations différentielles $y'' + y = \mathrm{ch}(x)$ et $y'' + y = \mathrm{sh}(x)$.

(b) on considère l'équation différentielle $(H_1) \quad y^{(4)} = y$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est solution de (H_1) si et seulement si $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.

(c) Résoudre (H_2)

(d) En déduire les solutions de (H_1).

(e) On note alors $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$, sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(f) Quelle est la dimension de E ?

(g) Justifier que $\delta : h \mapsto h'$ est un endomorphisme de E, et préciser sa matrice dans une base de E.

(h) En déduire un polynôme annulateur de δ.

4. *facultatif*
On admet qu'un endomorphisme en dimension finie admet toujours au moins un polynôme annulateur.

(a) Justifier l'existence d'un entier $d \geq 1$ tel que $d = \min\{\deg(P); P \text{ annulateur de} f\}$. On choisit alors un polynôme unitaire π annulateur de f et de degré minimal d.

(b) Démontrer que si P est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et si π divise P, alors P est annulateur de f.

(c) Enoncer le théorème de euclidienne.

(d) En déduire que tout polynôme annulateur est multiple de π.

(e) Conclure que l'ensemble des polynômes annulateurs de f est $\mathcal{A}nn(f) = \{Q\pi; Q \in \mathbb{K}[X],\ Q \neq 0\}$

(f) Comment peut-on préciser le résultat de la question 3(h) ?