Exercice 1 *Réduction*

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire identité. On se donne l'application linéaire $s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{cases} s(e_1) = e_3 \\ s(e_2) = e_4 \\ s(e_3) = e_1 \\ s(e_4) = e_2 \end{cases}$$

et l'application linéaire p définie, par $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id} - s)$. L'objectif de cet exercice est de diagonaliser les applications linéaires s et p.

1. L'objectif de cette question est d'étudier s.
   (a) Donner la matrice S de s dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que S est diagonalisable (cette question n'exige aucun calcul).
   (c) Calculer S^2. Que peut-on en déduire sur s ?
   (d) Calculer le polynôme caractéristique de S.
   (e) Montrer que S admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2, et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
   (f) On note E_1 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_1.
   Donner une base (u_1, u_2) de E_1, telle que les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 soient égales à 0, 1 ou -1.
   (g) On note E_2 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_2.
   Donner une base (u_3, u_4) de E_2, telle que les coordonnées des vecteurs u_3 et u_4 soient égales à 0 ou 1.
   (h) Trouver une matrice D_1 diagonale et une matrice inversible Q_1 telles que $S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$.
   On ne demande pas de calculer Q_1^{-1}.
2. L'objectif de cette question est d'étudier p.
   (a) Donner la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Calculer $p \circ p$. Que peut-on en déduire sur p ?
   (c) Calculer $p(u_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   (d) En déduire une base dans laquelle la matrice de p est diagonale, c'est à dire que l'application linéaire p est diagonalisable.
   (e) Trouver une matrice D_2 diagonale et une matrice inversible Q_2 telles que $P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$.
   On ne demande pas de calculer Q_2^{-1}.
3. On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$.
   (a) Donner la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En faisant le moins de calcul possible, trouver à l'aide des résultats précédents une matrice D_3 diagonale et une matrice inversible Q_3 telles que $F = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_3^{-1}.