Exercice 1

Exercice 3

Soit un espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice M dans la base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Donner le polynôme caractéristique de la matrice M.
   (b) Montrer que f a deux valeurs propres, λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
   Indication : on vérifiera que $\lambda_1 = 2$ est la plus grande des valeurs propres
2. Déterminer deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, tels que $(\overrightarrow{u})$ est une base du sous-espace propre $\mathcal{E}_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\lambda_1 \mathrm{id} - u)$ et $(\overrightarrow{v})$ une base du sous-espace propre $\mathcal{E}_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(\lambda_2 \mathrm{id} - u)$.
3. **[spécial 5/2]** Pourquoi la matrice A n'est-elle pas diagonalisable ?
4. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de E.
   Indication : on pourra remarquer que [$\overrightarrow{k}$ est de composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$].
   (b) Calculer les composantes de $f(\overrightarrow{u})$, $f(\overrightarrow{v})$, $f\left(\overrightarrow{k}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$
   (c) Calculer les composantes de $f(\overrightarrow{u})$, $f(\overrightarrow{v})$, $f\left(\overrightarrow{k}\right)$ dans la base $\mathcal{B}'$
   (d) Montrer que dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de f est de la forme : $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en précisant α.
5. Calculer N^2, N^3. En déduire une formule pour N^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette formule sera démontrée par récurrence.
6. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.
7. Montrer que N est inversible. Calculer N^{-1}. Démontrer que la formule trouvée au 5. est valable pour $n \in \mathbb{Z}$.
   [On note $N^{-p} = \left(N^{-1}\right)^p$]
8. En déduire l'expression de M^n pour $n \in \mathbb{Z}$.