Exercice 1 *Système différentiel*

- toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 ;
- $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est un élément de $\mathbb{K}^n$ et $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

En outre, lorsque $y \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on note : $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ qui est donc un élément de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

Soient :

- (E_α) l'équation différentielle linéaire : $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$;
- $\mathcal{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \quad f^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} \right\}$.

1.
   (a) Écrire l'équation différentielle (E_α) à l'aide d'un système différentiel.
   (b) Montrer que si $y \in \mathcal{S}_\alpha$, alors $y \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
   (c) Prouver que $\mathcal{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.
   (d) Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_\alpha$.

On prend jusqu'à la fin de cette partie : $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2. Écrire l'équation (E_α) dans ce cas.
3. Déterminer tous les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto e^{rx}$ appartient à $\mathcal{S}_\alpha$.
4. (a) On suppose que les γ_k sont distincts deux à deux.
   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_k par : $x \mapsto e^{\gamma_k x}$.
      i. Soient $(m_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ un n-uplet de scalaires, et $\Psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k$.
      Calculer les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$.
      ii. En déduire que la famille $(\psi_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est libre dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde.
   (b) Donner une base de $\mathcal{S}_\alpha$. (On pourra utiliser des résultats obtenus dans la partie I)
5. Soit d l'application qui à $y \in \mathcal{S}_\alpha$ associe $d(y) = y'$.
   (a) Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathcal{S}_\alpha$.
   (b) L'endomorphisme d est-il bijectif ?
   (c) L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?