Exercice 1 :

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [[-1, p]]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in [[0,p]],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

1. **Etude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

   1.1. Soit $(a_k)_{k\in[[-1,p]]}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.
   Démontrer que $a_{-1} = 0$.

   1.2. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k\in[[-1,p]]}$ est libre.
   On note $E = vect(\mathcal{B})$.

   1.3. En déduire la dimension de E.

2. On note u l'application qui à toute fonction de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall x \in J,\ g(x) = (1+x) f'(x).$$

   2.1. Déterminer, pour $k \in [[-1, p]]$, les images de f_k par u.

   2.2 Vérifier que u est un endomorphisme de E.

   2.3. Déterminer le noyau et l'image de u.

   2.4. Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

   2.5. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.

   2.6. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

   2.7. L'endomorphisme u^2 est il diagonalisable ?

3. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) : $f_{-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.

4. Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en 0.

   4.1. On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t)\, y'(t)$ nulle en 0.
   Expliciter h_3.

   4.2. En itérant le procédé, pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note h_k la solution nulle en 0 de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.
   Expliciter h_k.

5. **Etude de la série de fonction $\displaystyle\sum_{k\geq 2} h_k$**

   5.1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 2} h_k$ converge simplement sur J et calculer sa somme H.

   5.2. La fonction H est-elle dans E ?

   5.3. En utilsant la question 5.1. vérifier que H est dérivable et que $H' \in E$.