Problème 1

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1. Soit un entier n strictement positif.
   (a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\mathrm{d}t$.
   (b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$
   et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\mathrm{d}u$ en fonction de l'intégrale I_n.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$
2. Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\mathrm{d}u.$$
   (a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\mathrm{d}u$.
   (b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

1.(a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Je considère que $t \mapsto t^\alpha$ est continue en 0 ; en effectuant le prolongement par continuité car $\alpha > 0$ en posant $0^\alpha = 0$.

De plus $\dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\alpha n > 1$ car $n \geq 1$ et $\alpha > 1$.

Ainsi par comparaison à une fonction positive, $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

d'où $\boxed{\text{l'existence de l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\mathrm{d}t = I_n}$

(b) La fonction $u \longmapsto \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$ est de classe $\mathcal{C}1$ et strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ car $\dfrac{1}{\alpha} > 0$ et $n^{\frac{1}{\alpha}} > 0$ selon le théorème de la bijection car $\lim\limits_{u\to 0} \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = +\infty$

Le changement de variable $t = \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$; $\mathrm{d}t = \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\mathrm{d}u$ conserve donc la nature de l'intégrale et sa valeur, d'après le cours. Ainsi on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\mathrm{d}u$$

Par linéarité, comme $\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\mathrm{d}u$ converge.

De plus, $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$

donc $\boxed{\text{l'application } u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\mathrm{d}u = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} I_n}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \geq 0$. On a $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \left(\frac{u}{n}\right)^{n-k} = 1+u+\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^{n-k}$

or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{u}{n}\right)^{n-k} \geq 0$ somme potentiellement vide de réels positifs

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0,\ \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u}$

2. Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right)\right)$

   Or $\dfrac{u}{n} \longrightarrow 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \sim \dfrac{u}{n}$

   Ainsi $n\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \sim u$ donc $n\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \longrightarrow u$

   comme $\exp$ est continue en u, on a par composition : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n = \mathrm{e}^u}$

3.(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} = \dfrac{1}{u^{1-1/\alpha}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$.

(i) Pour chaque $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$.

(ii) Soit $u \in]0,+\infty[$. En utilisant 2), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u) = \dfrac{1}{u^{1-1/\alpha}\mathrm{e}^u} = u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}$.

Ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $f : u \longmapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}$.

(iii) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ par théorèmes généraux.

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$. On a $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \geq 1+u > 0$ et $u^{1-1/\alpha} > 0$.

donc $|f_n(u)| = \dfrac{1}{u^{1-1/\alpha}\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} \leq \dfrac{1}{u^{1-1/\alpha}(1+u)}$

Je pose $\varphi : u \longmapsto \dfrac{1}{u^{1-1/\alpha}(1+u)}$

φ est continue sur $]0,+\infty[$ par théorèmes généraux.

De plus, $\varphi(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{u^{1-1/\alpha}}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1-1/\alpha}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1-1/\alpha < 1$

donc φ est intégrable sur $]0,1]$ par comparaison à une fonction positive

Et $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{2-1/\alpha}}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u^{2-1/\alpha}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2-1/\alpha > 1$ et $\alpha > 1$

donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par comparaison à une fonction positive

Ainsi la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall u \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(u)| \leq \varphi(u)$$

Avec **(i)**, **(ii)**, **(iii)** et, **(iv)**, le théorème de convergence dominée s'applique et on a l'existence des membres et la limite :

$$\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f$$

ainsi $\boxed{\text{la limite de la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ lorsque } n \text{ tend vers plus l'infini est égale à } \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$

(b) D'après 1c), $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{v_n}{\alpha n^{1/\alpha}}$ et d'après la question précédente : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$

or $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f > 0$ car f positive et continue sur $]0,+\infty[$ et non identiquement nulle car $f(1) = 1/\mathrm{e}$

donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ d'où $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha n^{1/\alpha}}}$