Exercice 4

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

   (a) On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k \in F$.
   Déterminer la dimension de F et en donner une base.

   (b) Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

   (c) Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.
   Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
   Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

   (d) Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2P(X = n+2) = 3P(X = n+1) - P(X = n).$$

   (a) On note $p_n = P(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n. En déduire la loi de la variable aléatoire X.

   (b) Justifier que la série $\sum_n n p_n$ converge.
   Justifier que la série $\sum_n n p_n^2$ converge.