Exercice 1

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la base de f^m dans la base canonique.
5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.
8. Déterminer toutes les fonctions dérivables $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 8x(t) + 4y(t) - 7z(t) \\ y'(t) & = & -8x(t) - 4y(t) + 8z(t) \\ z'(t) & = & z(t) \end{array} \right.$$

on pourra poser $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *et vérifier que la relation* $X'(t) = AX(t)$ *se ramène à* $Z'(t) = DZ(t)$ *où* $Z : t \mapsto P^{-1}X(t)$*, pour en déduire l'expression de* $Z(t)$ *puis de* $X(t)$