Exercice 3 :
On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + mxy'(x) + y(x) = x^2 \qquad (E_m)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, où m est un paramètre réel. On note (H_m) l'équation homogène associée à (E_m) :

$$y''(x) + mxy'(x) + y(x) = 0 \qquad (H_m)$$

Les parties A, B, C et D de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Partie A – Étude du cas $m = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H_0).
2. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (E_0) définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, où α et β sont des réels à déterminer.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).
4. Donner l'unique solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (E_0) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Partie B – Étude du cas $m = 1$
Dans les trois premières questions de cette partie, on cherche les séries entières $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ qui sont solutions de l'équation différentielle homogène (H_1) et pour lesquelles $a_1 = 0$.

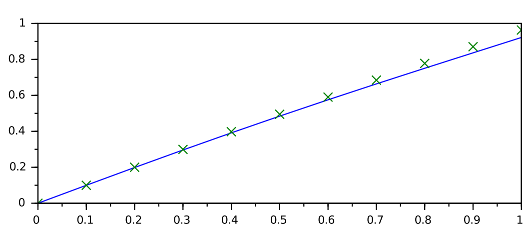
1. Montrer que la suite des coefficients $(a,)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.
3. Donner une expression simple de la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en fonction de x et a_0.

Partie C – Résolution approchée d'un problème de Cauchy
Soit N un entier naturel non nul. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation (E_0) avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ par la méthode d'Euler, en prenant un pas égal à $1/N$. On admet que cela revient à calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1/N$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^2(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) + u_n = \frac{n^2}{N^2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de N, n, u_n et u_{n+1}.
2. Écrire une fonction `cauchy`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul N et renvoie le vecteur $[u_0, u_1, \ldots, u_N]$.

Sur la figure suivante, on représente le graphe de la solution théorique du problème de Cauchy sur l'intervalle $[0\,;1]$, ainsi que les points de coordonnées $(k/N, u_k)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ (ici on a choisi $N = 10$).



3. Comment agir sur le paramètre N pour améliorer la solution approchée ? Quel est l'impact sur le temps de calcul ?

3