

Exercice 1

Le 23 décembre, deux lutins du père Noël, Tic et Tac produisent des chevaux de bois au cours de leur journée de travail, en quantités respectives X et Y , où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p q^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité \mathbb{P}_X et \mathbb{P}_Y .
2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.
3. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ et $\mathbf{P}(X < Y)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.
5. Que représente (physiquement) la variable aléatoire S ?
6. Calculer $\mathbb{E}[S]$.



Exercice 2

La journée du 24 décembre, Tic et Tac décident de travailler ensemble pour terminer la production de poupées lutins.

Pour chaque poupée d'indice $i \in \mathbb{N}^*$, Tic choisit de coudre un nombre aléatoire N_i de boutons selon la loi $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

Puis Tac lance un dé à 6 faces et ajoute un grelot doré si N_i et le résultat du dé sont pairs, un grelot argenté sinon. On notera $G_i = 1$ lorsque le grelot est doré, et $G_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi du couple (G_1, N_1) .
2. G_1 et N_1 sont-elles indépendantes ?
3. Les lutins décident d'arrêter leur travail lorsque deux poupées produites à la suite possèdent un grelot doré. En supposant l'indépendance mutuelle entre les variables aléatoires $(N_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et les lancers de dés, déterminer la loi du nombre T total de poupées produites.

4. Justifier que l'évènement : « le lutins produisent un nombre fini de poupées » est quasi-certain.
5. calculer $\mathbb{E}[T]$.



Exercice 3

Le sac du père Noël contient n cadeaux étiquetés de 1 à n . Pour la première cheminée visitée, il réalise 2 tirages successifs sans remise.

On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du premier cadeau déposé, et Y celle correspondant au numéro du second cadeau déposé.

1. Donner la loi de X .
2. Donner la loi de Y .
3. Calculer $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X + Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

