Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.
Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle\,,\,\rangle$.
Soit $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On va l'équivalence des deux propositions suivantes :
   i) $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T AX \geqslant 0$
   ii) $\forall\, \lambda \in \mathcal{S}p(A),\ \lambda \geqslant 0$
   (a) Supposons i).
   Montrer ii) à l'aide d'un vecteur colonne propre X associé à une valeur propre réelle λ.
   (b) Supposons ii).
   On sait d'après le théorème spectral, que A est à spectre réel et est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. A l'aide d'une base orthonormée $(V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AV_i = \lambda_i V_i$ pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres avec multiplicités de A, démontrer i)
   (c) Conclure.

   On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.
2. Soient J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha+1)I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E.
   (a) Calculer le rang de J et la trace de J. En déduire que le spectre de J est $\{0, n\}$.
   (b) Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.
   (c) Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.

---

la suite est facultative

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   ii) $\forall\, \lambda \in \mathcal{S}p(A),\ \lambda \geqslant 0$
   iii) $\exists\, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
4. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

   On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.
   (b) Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $b(u_i) = \sqrt{\lambda_i} u_i$.
   Justifier que b est un endomorphisme symétrique.
   (c) Démontrer que : $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b)$.