Exercice 1 *Produits scalaires*

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente
2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \, \mathrm{d}t = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

4. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in [\![0,n]\!]\}$.

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$.
13. En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.
14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser les question 9 et 13.

DM 11 (facultatif)

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.
17. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$