Exercice 1

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules. On note T_n le nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Déterminer (en fonction de n et N) les valeurs prises par la variable T_n (on distinguera 2 cas : $n \leq N$ et $n > N$).
2. Donner la loi de T_1, de T_2. Calculer leurs espérances.

---

la suite est facultative

---

3. On se fixe maintenant $n \geq 2$. Calculer

$$\mathbb{P}\left(T_n = 1\right), \quad \mathbb{P}\left(T_n = 2\right), \quad \mathbb{P}\left(T_n = n\right).$$

4. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(T_{n+1} = k\right) = \frac{k}{N}\mathbb{P}\left(T_n = k\right) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}\left(T_n = k-1\right). \quad (\star\star)$$

5. On note G_n la fonction génératrice de la variable T_n.
   (a) Rappeler la définition de G_n. Montrer qu'ici, la fonction G_n est définie sur tout $\mathbb{R}$.
   (b) Rappeler le lien entre G_n et $\mathbb{E}\left[T_n\right]$.
   (c) En utilisant l'équation $(\star\star)$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_{n+1}\left(x\right) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right)G_n'\left(x\right) + xG_n\left(x\right).$$

   (d) En déduire que

$$\mathbb{E}\left[T_{n+1}\right] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left[T_n\right] + 1$$

   puis que

$$\mathbb{E}\left[T_n\right] = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$