Exercice :

1. On considère la fonction K définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \quad K(x,y) = x\,\ln(\frac{x}{y}) + (1-x)\,\ln(\frac{1-x}{1-y}) \qquad (1)\ .$$

   (a) Démontrer que $-\ln(t) \geqslant 1-t$ pour tout $t>0$ avec égalité si et seulement si $t=1$.

   (b) En déduire que la fonction K est minorée par 0 sur son ensemble de définition. Est-elle majorée ?

   (c) Justifier que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\times]0,1[$ et calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial K}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial K}{\partial y}$.

   (d) En déduire les points où la fonction K atteint sa borne inférieure.

   (e) En appliquant, pour $y \in]0,1[$ fixé, la formule de Taylor avec reste intégral à $J_y : x \longmapsto K(x,y)$, justifier l'inégalité :

$$x\,\ln(\frac{x}{y}) + (1-x)\,\ln(\frac{1-x}{1-y}) \geqslant 2\,(x-y)^2 \qquad (6)\ .$$

---

partie facultative

2. Pour toute partie D de $[\![1,p]\!]$ et tout vecteur $x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note :

$$x_D = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in D} x_i & \text{si } D \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } D = \emptyset \end{cases}.$$

Soit $x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ et $y=(y_1,y_2,\cdots,y_p)$ deux éléments de ${\mathbb{R}_+^*}^p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^p x_i = \sum_{i=1}^p y_i = 1.$$

On note $B_+ = \{i \in [\![1,p]\!] \mid x_i > y_i\}$ et $B_- = \{i \in [\![1,p]\!] \mid x_i \leqslant y_i\}$.

   (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|$ en fonction de x_{B_+} et y_{B_+}.

   (b) Justifier l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^p x_i\,\ln(\frac{x_i}{y_i}) \geqslant x_{B_+}\,\ln(\frac{x_{B_+}}{y_{B_+}}) + (1-x_{B_+})\,\ln(\frac{1-x_{B_+}}{1-y_{B_+}}).$$

   (c) En déduire l'inégalité, dite de Pinsker, qui généralise l'inégalité (2) :

$$\sum_{i=1}^p x_i\,\ln(\frac{x_i}{y_i}) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^p |x_i-y_i|\right)^2 \qquad (7)\ .$$