## Exercice 1.

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.

On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout élément $f$ de $\mathscr{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, $T$-périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)_d dt$
2. On suppose de plus dans cette question que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que si $f$ est $T$-périodique, il en est de même pour $f'$
   Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que l'application $U$ qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.
   (a) Montrer que la restriction de $U$ à $E_n$ définit un endomorphisme $U_n$ de $E_n$.
   (b) Ecrire la matrice de $U_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
   (c) L'endomorphisme $U_n$ est-il bijectif ? diagonalisable ?
6. Justifier que, si $f$, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\mathrm{Ker}(U)$, alors :
   (*i*) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
   (*ii*) $f$ est périodique de période 1.
7. A-t-on : $\mathrm{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ ?
8. Donner explicitement une fonction $f$ non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.
9. L'endomorphisme $U$ est-il surjectif ?
10. Soient $a$ un réel non nul et $f_a$ la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.
    (a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.
    (b) Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
    (c) Montrer alors que tout réel $\lambda$ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme $U$.