l'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ soit bornée.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ sont convergentes et que
$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt - \frac{F(a)}{a}$$
2. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ sont convergentes et que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit absolument convergente.

3. Montrer que la fonction
$$\mathcal{L}(f) \ : \ x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$$
est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
5. Soit $f \ : \ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.
   (a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle
   $$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$
   (b) On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe C^2 et vérfient
   $$\forall x \in]0, +\infty[, \ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$
   Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)\,dt$ et $\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_2(t)\,dt$ où f_1, f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
   (d) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\forall x > 0, \ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a
$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$
7. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire que
$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$
8. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

CCP2017 - PSI

1. $t\mapsto \dfrac{F(t)}{t}$ étant continue sur $[a,+\infty[$, la seule borne impropre est au voisinage de $+\infty$. Comme F est bornée, on a $\dfrac{F(t)}{t^2}=O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison aux fonctions de Riemann, $t\mapsto \dfrac{F(t)}{t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et finalement sur $[a,+\infty[$. A fortiori, on a existence de
$$\int_a^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,dt$$
$t\mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est continue sur $[a,+\infty[$ et l'unique borne mpropre est donc celle au voisinage de $+\infty$. On revient ici à la définition de l'existence de l'intégrale (et on ne cherche pas à prouver l'intégrabilité). Par intégration par parties (et comme F est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ par théorème fondamental)
$$\int_a^b\frac{f(t)}{t}\,dt=\left[\frac{F(t)}{t}\right]_a^b+\int_a^b\frac{F(t)}{t^2}\,dt$$
Comme F est bornée, le terme entre crochets admet une limite (nulle) quand $b\to+\infty$. On a vu en début de question que la seconde intégrale admet aussi une limite quand $b\to+\infty$. On a donc (existence et valeur)
$$\int_a^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt=-\frac{F(a)}{a}+\int_a^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

2. $t\mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). L'unique borne impropre est au voisinage de $+\infty$. Comme $x\mapsto\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,dt=1-\cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, on peut utiliser la question précédente pour justifier que l'intégrale existe au voisinage de ∞ et donc sur $\mathbb{R}^+$.
Comme $t\mapsto 1-\cos(t)$ est une primitive de sin sur $\mathbb{R}^+$, une intégration par partie (on travaille sur un segment de $\mathbb{R}^{+*}$) donne
$$\forall[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*},\ \int_a^b\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b+\int_a^b\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$
Comme $1-\cos(t)=2\sin^2(t)$, on a donc
$$\forall[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*},\ \int_a^b\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b+2\int_a^b\frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\,dt$$
Dans l'intégrale, on pose $u=t/2$ (changement de variable affine), on a alors
$$\forall[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*},\ \int_a^b\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b+2\int_{a/2}^{b/2}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du$$
Le membre de gauche admet une limite quand $a\to0$ et quand $b\to+\infty$. Il en va de même du crochet (de limite nulle, en particulier car $1-\cos(t)\sim t^2/2$ au voisinage de 0) et en passant à la limite, on obtient l'existence de l'intégrale de $\sin^2(u)/u^2$ sur $\mathbb{R}^+$ avec
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$

3. On utilise le résultat de continuité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ t\mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ x\mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \forall t\in\mathbb{R}^+,\ |f(t)e^{-xt}|\le|f(t)|$. Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4. On doit maintenant utiliser le théorème de régularité.
   - $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ t\mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ x\mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée k-ième $x\mapsto(-t)^kf(t)e^{-xt}$.
   - $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ t\mapsto(-t)^kf(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*},\ \forall x\in[a,b],\ \forall t\in\mathbb{R}^+,\ |(-t)^kf(t)e^{-xt}|\le|f(t)|t^ke^{-at}$. $t\mapsto t^ke^{-at}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle en $+\infty$ (car $a>0$) et donc bornée sur $\mathbb{R}^+$. Le majorant est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (puisque continu sur $\mathbb{R}^+$ et $O(f(t))$ au voisinage de $+\infty$, on n'a donc pas besoin du caractère borné de f).

Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{L}(f)^{(k)}\ :\ x \mapsto \int_0^{+\infty} (-t)^k f(t)e^{-xt}\,dt$$

Pour la limite de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$, on va utiliser le théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle. On se donne donc une suite (x_n) de limite infinie. On peut sans perte de généralité supposer que $x_n \geq 1$ pour tout n (puisque $x_n \to +\infty$). On pose alors $g_n\ :\ t \mapsto f(t)e^{-x_n t}$.
- $\forall n,\ g_n \in C^0(\mathbb{R}^+)$.
- $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et la suite (g_n) est donc simplement convergente vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall n,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |g_n(t)| \leq |f(t)|e^{-t}$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (continu sur $\mathbb{R}^+$ et dominé par f au voisinage de $+\infty$).

On en déduit que $\mathcal{L}(f)(x_n) \to 0$ et, par caractérisation séquentielle,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$$

5. (a) La fonction f proposée est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors utiliser ce qui précède. $\mathcal{L}(f)$ est ainsi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-xt}\,dt$$

On en déduit que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)''(x) + \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2+1)f(t)e^{-xt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$$

(b) Soient α et β des fonctions de classe C^2 telles que $\alpha' \cos + \beta' \sin$. Posons alors $g = \alpha\cos + \beta\sin$. On a alors (avec l'hypothèse faite sur α, β)

$$g' = -\alpha\sin + \beta\cos,\ g'' = -\alpha\cos - \beta\sin - \alpha'\sin + \beta'\cos$$

et ainsi

$$g'' + g = -\alpha'\sin + \beta'\cos$$

Pour que α et β conviennent, il suffit donc que $\begin{cases} \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$. La résolution du système montre qu'il suffit que

$$\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad\text{et}\quad \beta'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Si h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \displaystyle\int_1^x h(t)\,dt$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si, de plus, l'intégrale de h existe au voisinage de $+\infty$, on peut ajouter la constante $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\,dt$ (cela reste une primitive). $x \mapsto -\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\,dt$ est ainsi aussi une primitive de h. On peut appliquer ceci avec $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ (on a prouvé l'existence de l'intégrale) et $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ (la preuve de l'existence est la même). On peut donc choisir

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad\text{et}\quad \beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$$

On peut donc choisir $f_1(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $f_2(t) = -\dfrac{\cos(t)}{t}$.

(c) On a ainsi une solution particulière h définie par

$$h(x) = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$$

Le changement de variable affine $u = t - x$ donne

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x+u}\,du$$

(d) L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ est un plan affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y''+y=0$, c'est à dire par $\text{Vect}(\cos,\sin)$. On obtient l'ensemble des solutions en ajoutant la solution particulière trouvée. Comme $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$$\exists a,b/\ \forall x>0,\ \mathcal{L}(f)(x)=a\cos(x)+b\sin(x)+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

6. Soit $x>0$. $t\mapsto\dfrac{\sin(t)}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On peut effetcuer une IPP pour obtenir

$$\forall a>0,\ \int_0^a\frac{\sin(t)}{x+t}\,dt=\left[-\frac{\cos(t)}{x+t}\right]_0^a-\int_0^a\frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\,dt$$

On en déduit que

$$\forall a>0,\ \left|\int_0^a\frac{\sin(t)}{x+t}\,dt\right|\le\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}\right)+\int_0^a\frac{dt}{(x+t)^2}\le 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}\right)$$

Tous les termes admettent une limite quand $a\to+\infty$ et le passage à la limite donne

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\,dt\right|\le\frac{2}{x}$$

On conclut que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\,dt=0$$

Comme $\mathcal{L}(f)$ est aussi de limite nulle en $+\infty$, on en conclut que $\lim\limits_{x\to 0^+} a\cos+b\sin$ est de limite nulle en $+\infty$. En introduisant les suites $(2n\pi)$ et $(2n\pi+\pi/2)$, on en déduit que $a=b=0$ et donc que

$$\forall x>0,\ \mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

7. Remarquons que

$$\frac{\sin(t)}{x+t}-\frac{\sin(t)}{t}=-\frac{x\sin(t)}{t(x+t)}$$

On en déduit que

$$\forall t\ge 1,\ \left|\frac{\sin(t)}{x+t}-\frac{\sin(t)}{t}\right|\le|x|\frac{1}{t^2}$$

Le majorant étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on peut intégrer ! On obtient un majorant de limite nulle quand $x\to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+}\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{x+t}-\frac{\sin(t)}{t}\right)\,dt=0$$

Par ailleurs, comme $\forall t,\ |\sin(t)|\le|t|$ et comme toutes les intégrales existent (fonctions continues ou prolongeables par continuité),

$$\left|\int_0^1\left(\frac{\sin(t)}{x+t}-\frac{\sin(t)}{t}\right)\,dt\right|\le\int_0^1\frac{x}{x+t}\,dt=x\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)$$

et le majorant est de limite nulle quand $x\to 0$. Finalement,

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{x+t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

8. On vient de voir que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ quand $x\to 0$. Mais $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0 et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt=\mathcal{L}(f)(0)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$$