Exercice 1

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré $\mathscr{D}$ défini par

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leq 2 \text{ et } |x-y| \leq 2\right\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathscr{D}, \quad f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right) - x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à la nature de l'ensemble $\mathscr{D}$.
   (a) Tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ les quatre droites d'équations $x + y = 2$, $x + y = -2$, $x - y = 2$ et $x - y = -2$. Sur la figure, indiquer l'ensemble $\mathscr{D}$.
   (b) Montrer que si (x, y) appartient à $\mathscr{D}$, alors $(x, -y)$ appartient encore à $\mathscr{D}$. Quelle symétrie possède l'ensemble $\mathscr{D}$?
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ possède une symétrie centrale que l'on déterminera.
   (d) Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble $\mathscr{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur l'ensemble $\mathscr{D}$.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'ensemble $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathscr{O} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| < 2 \text{ et } |x-y| < 2\right\}.$$

   (a) Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ de f en tout point (x, y) de $\mathscr{O}$.
   (b) Montrer que $(1, 0)$ est l'unique point critique de la fonction f dans $\mathscr{O}$.
   (c) Sans calculer les deux dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, montrer qu'elles sont néanmoins égales pour tout $(x, y) \in \mathscr{O}$. Vous utiliserez un théorème bien choisi que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses.
   (d) Pour $(x, y) \in \mathscr{O}$, donner une expression des dérives partielles secondes notées

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

   (e) Donner les valeurs de r, s et t au point$(1, 0)$. L'évaluation de la fonction $rt - s^2$ au point $(1, 0)$ permet-elle de conclure sur la nature du point critique $(1, 0)$?
   (f) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1 + u)$.
   (g) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $t \mapsto f(1 + t, 0) - f(1, 0)$ au voisinage de 0. Le point critique $(1, 0)$ est-il un extremum local de f ?