I. Consigne

Organisez-vos révisions d'été, le calendrier proposé est indicatif.
Le cours de PCSI doit être revu, régulièrement et à votre rythme.
Ce devoir doit être rendu pour le jour de la rentrée.
Si vous êtes bloqué ou voulez vérifier des valeurs numériques, vous pouvez suivre le lien 👍 vers les indications.
Par ailleurs des corrections seront mises en lignes sur le cahier de texte des PC à l'issue de chaque quinzaine prévue ici :
`https://www.cpge-brizeux.fr/wordpress/pc/mathematiques-pc-2425/devoir-dete-2024-25.html`

II. Du 1 au 15 juillet : révisions d'algèbre

Exercice 1 *Matrice d'une application linéaire*

Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'endomorphisme de E figuré défini pour tout (x, y, z) par

$$f(x, y, z) = (2x - y, -2x + y - 2z, x + y + 3z)$$

On pose $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

1. Donner la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
3. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et son inverse P^{-1}.
5. Quelle relation du cours relie les matrices A , D et P ?
6. Calculer D^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (toute formule de récurrence doit être démontrée en détails).
7. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

👍[1]

Exercice 2 *Polynômes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = \dfrac{1}{\mathbf{i}} [(X + \mathbf{i})^n - (X - \mathbf{i})^n]$.

1. Quel est le degré de P ? On précisera le coefficient du terme de plus haut degré (ou coefficient dominant).
2. Justifier que P est à coefficients réels.
3. Déterminer les racines de P.

👍[2]

révisions de cours
Réviser les notions suivantes : noyau, image d'une application linéaire ; endomorphisme, caractérisation de l'injectivité par le noyau, théorème du rang, surjectivité, bijectivité, pivot de Gauss

III. Du 16 au 31 juillet : révisions d'analyse

Exercice 3 *Séries numériques*

1. Etant donnée $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t)$ continue et décroissante, comparer pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [n, n+1]$ les valeurs $f(t), f(n), f(n+1)$.
2. Représenter cela sur un dessin.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de $f(n)$ et $f(n+1)$.

   (on pourra vérifier que pour $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} c\,\mathrm{d}t = c$).
4. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} f(n)$ et $I_N = \displaystyle\int_2^N f(t)\,\mathrm{d}t$.

   En sommant les inégalités précédentes por n de 2 à N, montrer que $S_N \geq I_{N+1}$.
   En sommant les inégalités précédentes por n de 2 à $N-1$, montrer que et que $I_N \geq S_N - f(2)$
5. En déduire que $f(2) + I_N \geq S_N \geq I_{N+1}$
6. On considère dans la suite la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$. Etudier la dérivabilité de f sur $[2, +\infty[$, puis donner son tableau de variations.
7. A l'aide du changement de variable $\ln t = u$, calculer $I_N = \displaystyle\int_2^N f(t)\,\mathrm{d}t$.
8. En déduire l'existence de limites finies pour $N \to +\infty$ de I_N, puis de (S_N).
9. Que représente $\lim S_N$ pour la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$? Quelle est la nature de cette série ?

👍[3]

Exercice 4 *Intégration et dérivation*

1. Soient I un intervalle réel, $a, b \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note F une primitive de f sur I.
   F est-elle dérivable ? de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Rappeler la formule reliant $F(b) - F(a)$ et f.
3. Calculer la dérivée de $t \longmapsto \dfrac{(\mathrm{ch}\, t)^{-2}}{-2}$
4. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{sh}\, t}{(\mathrm{ch}\, t)^3}\,\mathrm{d}t$.

👍[4]

révisions de cours

Réviser les notions suivantes : Développements limités, suites, fonctions usuelles $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \arctan, \mathrm{e}, \ln)$, suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou 2.

IV. Du 1 au 15 août : révisions de probabilités

Exercice 5 *Dénombrements et évènements*

On dispose de deux dés A et B.
Le dé A a 4 faces rouges et 2 blanches.
Le dé B a 2 faces rouges et 4 blanches.
On commence par choisir aléatoirement un de ces deux dés : A avec probabilité $1/3$ et B avec probabilité $2/3$. Une fois le dé choisi, on effectue plusieurs lancers, sans changer de dé.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge au premier lancer ?
2. On a obtenu rouge aux 2 premiers lancers. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé A ?
3. On a obtenu rouge aux n premiers lancers, $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé A ? Comment se comporte cette probabilité lorsque $n \to +\infty$?
4. On a obtenu rouge aux n premiers lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir rouge au $(n+1)$-ème ? Comment se comporte cette probabilité lorsque $n \to +\infty$?

[5]

Exercice 6 *Variables aléatoires*

Une rampe verticale de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 change d'état de la manière suivante :
à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé.
si, à l'instant $t = n$,$n \geq 0$, le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3, S_4 s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable.
si, à l'instant $t = n$, $n \geq 0$, le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.
On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant (s'il existe) où le spot S_2 s'allume.

1. Écrire une fonction python simulspot() qui simule le fonctionnement de la variable aléatoire X .
   On utilisera la libairie d'aléatoire : `import random` et la commande `random.randint(1,4)` qui permet de générer aléatoirement un entier de 1 à 4, de manière équiprobable.
2. Calculer la probabilité pour que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n .
3. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
4. Calculer la probabilité des événements $(X = n)$, pour $n \geq 3$.
5. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} n\mathbb{P}[X = n]$.

[6]

révisions de cours
Réviser les notions suivantes : lois usuelels (uniforme, Bernoulli $B(p)$, binomiale $B(N, p)$, formule des probabilités totales pour un système complet d'évèneements, $\cap$, $\cup$, évènements indépendants, évènements incompatibles, probabilités conditionnelles, variable aléatoire, espérance

V. Du 16 au 30 août : Calculs et révisions de cours

Exercice 7 *Nombres complexes*

Soit $\theta \in]0, \pi/4[$

1. Placer dans le plan complexe les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, $z_B = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}$, $z_C = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\pi-\theta)}$.
2. Calculer $|z_k|$ pour $k \in [\![1, 3]\!]$.
3. Calculer $|z_B - z_A|^2$ et $|z_C - z_B|^2$+$|z_A - z_C|^2$. Que peut on en conclure ?
4. Calculer $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$. Que retrouve-t-on ?

[7]

Exercice 8 *Suites adjacentes*

1. Rappeler le théorème des suites adjacentes.
2. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.
   (a) Justifier que $u_n > 0$ si et seulement si n est pair.
   (b) Pour tout $N \geq 2$, on pose $A_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{2N-1} u_n$ et $B_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{2N} u_n$.
   Calculer $A_{N+1} - A_N$ et $B_{N+1} - B_N$
   (c) En déduire que $(A_N)_{N\geq 2}$ est croissante et que $(B_N)_{N\geq 2}$ est décroissante.
   (d) Montrer que $B_N - A_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$
3. Conclure que (A_N) et (B_N) convergent vers une même limite finie L.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge, et exprimer sa somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ en fonction de L.

[8]

Exercice 9 *Encadrements*

1. (a) Rappeler le $DL_3(0)$ de $t \mapsto \sin t$.
   (b) En déduire un équivalent en 0 de $t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{(\sin t)^3}$.
   (c) La fonction $f\ :]0, \pi/2] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{(\sin t)^3}$ peut-elle être prolongée par continuité en 0 (en un fonction $\tilde{f}$ continue sur $[0, \pi/2]$) ?
2. (a) Soit $a > 0$. Donner le $DL_1(0)$ de $u \mapsto \ln(1+u)$
   (b) En déduire que $\ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (c) Rappeler la formule exprimant α^β à l'aide de $\ln$ et e.
   (d) Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$
   (e) On a $\displaystyle\lim_{n\to} 1 + \frac{a}{n} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to} 1^n = 1$.
   Pourquoi ne devait-on pas s'attendre à avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \neq \lim_{n\to}\left(\lim_{n\to} 1 + \frac{a}{n}\right)^n$? (pensez à vos variables muettes...)

3. (a) Comparer $\dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ pour $n \to +\infty$ (préciser une domination avec o).
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.

   (a) Soit $a > 0$. Comparer $\dfrac{n^a}{\mathrm{e}^n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$ pour $n \to +\infty$ (préciser une domination avec o).
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^a}{\mathrm{e}^n}$.

   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 0$ on pose $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}}{3^n}$.
   (b) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est géométrique.
   (c) En déduire sa nature et en cas de convergence une expression simplifiée de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

4. (a) Reliez les bonnes terminologies aux bons objets :
   a) série, b) somme partielle, c)somme
   1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$, 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, 3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$

👍[9]

Exercice 10 *Espaces euclidiens*

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique $(\ |\ )$.

1. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille de vecteurs (u, v, w)
   avec
   $u = (1,0,1), v = (1,1,1), w = (-1,1,0)$.
2. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - z = 0\}$ Justifier que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
3. Vérifier que u et v appartiennent à F.
4. En déduire une base orthonormée de F.
5. Le vecteur w appartient-t-il à F ?
6. Calculer la distance $d(w, F)$ de w à F, à l'aide du théorème de projection orthogonal.
7. représenter graphiquement F et w.

👍[10]

révisions de cours
Réviser les notions suivantes : notations des séries, séries de références, théorèmes de comparaison, exemples du cours; calcul de primitives, dérivées de fonctions composées, changement de variable dans une intégrale, DL usuels, formule de Taylor reste intégral

Indications

1. Le déterminant est un outil de calcul rapide pour montrer la liberté d'une famille de vecteurs colonnes.
   On calcule $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   D^n se calcule très facilement lorsque D est diagonale.
   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Revoyez al formule du binôme de Newton.
   les racines sont les $z_k = \dfrac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

3. $f'(t) = \dfrac{-\ln t(2+\ln t)}{t^2 \ln(t)}$
   Pour encadrer une intégrale, il suffit de savoir encadrer l'expression de la fonction qui apparaît après le signe intégrale. La croissance de l'intégrale parmet alors de conclure.
   La relation de Chasles permet de regrouper des intégrales dont les bornes se suivent en une seule intégrale.
   Le théorème d'encadrement de limites permet d'obtenir des existences de limites.
   Revoyez le lien entre la convergence d'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et l'existence d'une limite finie de la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right)_{N\geq 0}$. La notation somme (de série convergente) ne peut être employée qu'après avoir démontré la convergence : $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence.

4. Revoyer le théorème fondamental qui donne le lien entre primitive et dérivée, et en physique le lien entre position et vitesse.

5. Introduisez l'évènement A « on choisit le dé A », et $B = \overline{A}$.
   Le système $(A, \overline{A})$ est-il complet ? Si oui la formule des probabilités totales pourrait être utile.
   Pour plusieurs lancers consécutifs, introduisez la suite d'évènements R_i « on tire une face rouge au $i$ème lancer »

6. On va utiliser deux variables : t qui désigne l'instant où l'on est, et k qui désigne le spot allumé à l'instant courant. Une fonction possible est :

```
def simulspot() :
    t=0
    k=1
    while (k!=2) :
        t=t+1
        if (k==1) :
            k=random.randint(1,4)
        else :
            k=k-1
    return t
```

   Si le spot reste constamment allumé jusqu'à l'instant n , c'est qu'il y a eu la succession d'événément Ak : "le spot S1 est éclairé à l'instant k".
   Par la formule des probabilités composées, on trouve que :

$P(A1 \cap \cdots \cap An) = P(An|A1 \cap \cdots \cap An-1) \ldots P(A2|A1)P(A1) = 1/4^n$.
$P(X=1) = 1/4$
A l'aide d'une réunion disjointe $P(X=2) = 5/16$.
Soit $n \geq 3$
. S2 s'allume pour la première fois à l'instant n si et seulement si :
Soit S1 reste allumé jusqu'à l'instant n-1, et S2 s'allume à l'instant n. Soit S1 reste allumé jusqu'à l'instant n-2, et S3 s'allume à l'instant n-1.
Soit S1 reste allumé jusqu'à l'instant n-3, et S4 s'allume à l'instant n-2.
Ces cas sont disjoints
on obtient : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = 1/4 + 5/8 + 21 \sum_{n=3}^{+\infty} n/4^n = 7/3$.
la fin du calcul utilisera les notions vues en spé !

👍7.
N'oubliez pas que $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$ ni la relation de Pythagore $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1^2$ dans le bon triagle rectangle sur le cercle trigonométrique.
Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, sa norme euclidienne est $\|\overrightarrow{AB}\|_2 = |z_B - z_A|$
$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$ représente la mesure de l'angle $\hat{(}\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

👍8. Remarquez que $A_{N+1} - A_N = S_{2N+1} - S_{2N-1} = u_{2N+1} + u_{2N}$ à l'aide de la suite (S_N) des sommes partielles.
$B_N - A_N$ ne contient qu'un terme par télescopage.
Lorsque (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers une même limite, la suite des sommes partielels de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge vers cette limite !

👍9.
2) on peut composer des développements limités mais pas des équivalents !
3a) Faites le quotient : s'il tend vers 0 il y a une domination avec $o()$, s'il tend vers 1 il y un équivalent $\sim$, s'il est borné il y a une comparaison avec $O()$.
3b) préciser le théorème de comparaison de séries numériques. Revoyer vos croissances comparées.

👍10. Reconnaissez les équations de plan dans $\mathbb{R}^3$, et à partir de l'équation cartésienne on trouve tout de suite un vecteur normal.
Le projeté orthogonal $p_F(w)$ est tel que $\|w - p_F(w)\| = \min\{\|w - z\|; z \in F\}$ il permet de calculer la distance entre w et F.