Devoir Surveillé $n°2$
PSI
MATHEMATIQUES
(Samedi 24 Septembre 2022)
(durée : 2 heures)

Problème I : Caractérisation des matrices de trace nulle.

Partie I : Matrices de diagonale nulle

On admettra le résultat suivant : Un endomorphime u d'un $\mathbb{K}$-ev tel que $\forall x \in E, (x, u(x))$ est une famille liée, est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $u = kId_E$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $tr(A) = 0$.

On cherche à établir par récurrence sur n qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et N une matrice à diagonale nulle telles que $A = P^{-1}NP$.

1) Montrer la relation au rang $n = 1$.

2) Supposons la relation vraie au rang n. Considérons $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.

a) Justifier que, si $\exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda I_{n+1}$, alors la relation de récurrence au rang n+1 est vérifiée.

b) Soit $A \notin vect(I_{n+1})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ associé à A dans la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

(i) Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{K}^{n+1}/\{0\}$ tel que $(x, f(x))$ soit une famille libre et qu'on peut la compléter une base $\mathscr{B} = (x, f(x), v_3, \cdots, v_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.

(ii) Montrer que la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & M \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

avec $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $tr(M) = 0$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

(iii) Justifier qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et M' une matrice à diagonale nulle telles que $M = P^{-1}M'P$.

(iv) On pose

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & P & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$Q' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & P^{-1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Montrer que $Q' = Q^{-1}$.

Calculer $QA'Q^{-1}$.

Terminer la récurrence.

3) Déduire de ce qui précède, que pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(A) = 0$ si et seulement si il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ et N matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale nulle telles que $A = P^{-1}NP$.

Partie II : Commutateurs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle commutateur de (A, B) et on note $[A, B]$ la matrice AB-BA.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des commutateurs et On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale nulle.

On note D la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale dont la diagonale est $(1, 2, \cdots, n)$ c'est-à-dire
$D = (d_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ avec $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $d_{ii} = i$.

1. Montrer que, Si $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $tr(AB) = tr(BA)$.
2. Montrer que $\mathscr{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que $\forall M \in \mathscr{N}$, $[D, M] \in \mathscr{N}$.
4. Montrer que $\Phi : \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ définie par $\Phi(M) = [D, M]$ est un automorphisme de $\mathscr{N}$.
5. Montrer que, si C est un commutateur et $P \in Gl_n(\mathbb{K})$, alors $P^{-1}CP$ est encore un commutateur.
6. En déduire que $\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) / tr(A) = 0\} = \mathscr{C}$.
7. Justifier que $\mathcal{C}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?

Problème II

1 Questions de cours

1. Comment note-t-on :
   (a) La série de terme général a_n ?
   (b) La p-ième somme partielle de la série de terme général a_n ?
   (c) La suite de terme général a_n de premier terme a_1 ?
   (d) La somme de la série de terme général a_n ?
2. Quelle est la définition d'une série de terme général a_n convergente ?
3. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} z^n$ où $z \in \mathbb{C}$? En cas de convergence donner sa somme.

2 Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente.

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0 , r_n son reste de rang n : $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} r_n$ dans quatre exemples différents.

1. <u>**Exemple 1**</u> : On pose pour $n\geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   Montrer que $r_n = \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$.

2. <u>**Exemple 2**</u> : On pose pour $n\geqslant 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

   Calculer r_n puis montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

3. <u>**Exemple 3**</u> : On pose pour $n\geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

   Nous allons chercher un équivalent de r_n.
   Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

   (a) Montrer que $\forall t \in [k, k+1]\,, \dfrac{1}{(k+1)^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{k^2}$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2}\leqslant\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2}\leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :
   $$\frac{1}{n+1}\leqslant r_n\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$

   (d) Donner alors un équivalent de r_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n$?

4. <u>**Exemple 4**</u> :

   On pose pour $n\geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

   Expression intégrale de r_n :Soit n un entier naturel non nul ,
   On définit la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ par $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}\,x$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   (b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-x)^k$ pour $x \in [0,1]$ et en déduire que $I_n = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$.

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et sa somme, puis exprimer r_n en fonction de I_n.

5. Conclusion

(a) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 1 \text{ sont à déterminer.}$$

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} r_n$.