Devoir Surveillé $n°2$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 7 Octobre 2023
Sujet Niveau 2
Durée : 4 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Problème I

Partie I : Convergence des séries par transformation d'Abel

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note pour tout entier naturel n , $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, déterminer b_k en fonction de B_k et B_{k-1}.

   (b) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$, (On remarquera que $B_0 = b_0$).

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle .

   (a) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n - a_{n+1})$ converge .

   (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est convergente.

Partie II : Application aux convergences de quelques types de séries

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle . En utilisant la partie I, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}$ $(-1)^n a_n$ est convergente.

2. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ et α un réel .

   (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

   (b) Montrer que , pour tout $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{ik\theta}$ est divergente .

   (c) Montrer que , pour tout $\alpha > 0$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont convergentes .

   (d) Montrer que , pour tout $\alpha > 1$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes .

   (e) On suppose que $0 < \alpha \leqslant 1$.

      i. Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\cos(2n\theta)}{n^\alpha}$ est convergente .

      ii. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin^2(n\theta)}{n^\alpha}$ est divergente .

      iii. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ n 'est pas absolument convergente .

3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une une suite de nombres complexes telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$

   Montrer que pour tout réel α positif , la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est convergente

.

Problème II

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.
Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $M_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \;\; u(F) \subset G \;\text{ et }\; u(G) \subset F$$

Etant donnés deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.
On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) l'endomorphisme u est échangeur ;

(C2) il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;

(C3) les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties A et B est indépendante des autres. Les résultats de la partie D sont essentiels au traitement des parties E et F.

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.
On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det(u)$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres.
3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$ et en déduire que u est échangeur.

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $M_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.
5. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
   On se donne une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de G.
   La famille $B = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ est donc une base de E.
   Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans B.
7. Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)***et*(**C3**). *On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.*

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comarer $\ker(f)$ à $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire

$$\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$$

9. Démontrer que $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$, et que $\ker(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\ker(b) = \mathrm{Im}(b)$.
10. En déduire que u est échangeur.