**Devoir Surveillé** $n°3$
**PSI**
**MATHEMATIQUES**
Samedi 15 Décembre 2021
(Durée : 4 heures)
Documents, calculatrice et portables interdits

# Exercice I

1. Rappeler l'expression de la matrice de Vandermonde de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associée à $(a_1, a_2, \cdots a_n) \in \mathbb{K}^n$ et l'expression factorisée de son déterminant.
2. Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$. Quel est le coefficient de $X^3$ du polynôme $\lambda(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)(X-\delta)$ ?
3. Étant donné $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, on considère le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

   (a) Que vaut $\Delta$ si $\operatorname{card}\{a, b, c, d\} < 4$ ?

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le déterminant :

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

      i. En utilisant un développement par rapport à une ligne ou colonne, montrer que $P(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 et que le coefficient de $x^3$ est $-\Delta$.

      ii. Écrire $P(x)$ sous forme factorisée.

      iii. En déduire $\Delta$.

# Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts.

   (a) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, donner la définition du $j$ ième polynôme de Lagrange associé à $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$.

   (b) Montrer que $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

   (d) Soit $E$ l'espace des fonctions $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   On pose
   - $F = \{f \in E / \forall i \in [\![0, n]\!], f(a_i) = 0\}$.
   - $\mathscr{R}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égale à $n$.
     Ainsi ,toute fonction $p$ de $\mathscr{R}_n$ est de la forme $p : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$.

i. Montrer que $F$ est un sous espace vectoriel de $E$.

ii. Établir que $F$ et $\mathscr{R}_n$ sont supplémentaires dans $E$.
*On pourra utiliser la famille $(L_j)_{0\leq j\leq n}$ où $L_j$ est considéré comme fonction polynômiale.*

2. Déterminer l'unique polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = -1, P(2) = 1, P(-2) = 1, P(-1) = 2$$

3. Soit $P$ de degré $n$ tel que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$.

   (a) Comment s'écrit $P$ en fonction des polynômes de Lagrange $(L_k)_{1\leq k\leq n+1}$ associés à $(1, 2 \cdots, n+1)$ ?

   (b) Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Montrer que $L_k(n+2) = \dfrac{(-1)^{n+1-k}(n+1)!}{(n+2-k)!(k-1)!}$ .

   (c) En déduire que $P(n+2) = \dfrac{1+(-1)^n}{n+2}$.

# Exercice III

Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3(\ln n)^2}, \sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n^4}, \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}, \sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}, \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}, \sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n}$$

# Exercice IV

Les deux parties sont indépendantes entre elles.

## Partie I : Etude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}, n \in \mathbb{N}$

1. (a) Rappeler l'énoncé du théorème permettant de montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Rappeler l'énoncé du théorème permettant d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) De quel signe est $R_n$ ?

   (d) En écrivant $\frac{1}{p} = \int_0^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est une série alternée convergente.

3. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

## Partie II : Etude de $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}, n \in \mathbb{N}$

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.
   (a) Montrer que la suite $\left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right)$ est décroissante et minorée.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $L$ tel que :
   $$\lim_{n \to +\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right) = L + 2$$
   (c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} U_n - 2\sqrt{n} - L = 0$.
   (d) Soit $\theta$ un réel strictement supérieur à 1.
      i. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}, n \in \mathbb{N}$.
      ii. Établir que :
      $$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\theta - 1)n^{\theta - 1}}$$
      *Indication : Utiliser la technique de comparaison série-intégrale en s'aidant de la monotonie de* $t \longmapsto \frac{1}{t^\theta}$
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.
   (a) Donner la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$.
   (b) Montrer, si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes telles que $x_n \sim y_n$ alors,
   $$\sum_{p=n}^{\infty} x_p \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{\infty} y_p$$
   *On rappelle que* $x_n \sim y_n \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - y_n| \leq \varepsilon |y_n|$
   (c) En déduire $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. En procédant de manière analogue à 2 avec la suite $\left(v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$, montrer que
$$v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{24n^{\frac{3}{2}}}$$
4. En déduire que $U_n$ est de la forme :
$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$
5. (a) Montrer qu'il existe un réel $S$ tel que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

(b) Montrer que $r_{2n} = S - \sqrt{2}U_n + U_{2n}$ .

(c) En déduire qu'il existe deux réels $a$ et $b$ que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

(d) Exprimer $S$ en fonction de $L$.

(e) Montrer que $r_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

(f) Déterminer la nature de la série de terme général $r_n$.