Devoir Surveillé $n°3$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 25 Novembre 2023
Sujet Niveau 1
Durée : 4 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Exercice I 35

On considère l'application T définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], T(P) = (3X+8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P''$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. 2
2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(X^n) = a_n X^{n+1} + b_n X^n$ où a_n et b_n ~~est~~ sont un produit de deux facteurs à déterminer. 2
3. Montrer que $\mathbb{C}_3[X]$ est stable par T. 2
4. On note T_3 l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ induit par T.
   (a) Donner la matrice A de T_3 dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$. 2
   (b) Donner les éléments propres de T_3. 5 $E_\lambda(A) = \mathrm{vect}(\quad)$
   (c) Vérifier que la famille obtenue en réunissant les bases de chaque sous espace propres de T_3 est une base de $\mathbb{C}_3[X]$. 1+2
   (d) En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera. 2
   (e) On pose $\mathrm{Com}(A) = \{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}) / AM = MA\}$.
      i. Vérifier que $\mathrm{Com}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$. 0,5+0,5+1
      ii. Soit $M \in \mathrm{Com}(A)$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ associé à M dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
         A. Montrer que u et T_3 commutent. 1
         B. Montrer que pour toute valeur propre λ de T_3, $E_\lambda(T_3)$ est stable par U. 2
         C. En déduire une base de $\mathbb{C}_3[X]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale : On note cette matrice Δ cette matrice. 2
         D. Montrer que $AM = MA \iff D\Delta = \Delta D$. 2
         E. En déduire une base de $\mathrm{Com}(A)$. 2
5. En utilisant la question 2, montrer que si P est un vecteur propre de T, alors P est de degré égal à 3. 2
6. Quels sont alors les éléments propres de T ? 2
7. T est-il injectif ? 2
8. T est-il surjectif ? *Observer le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P.* 2

Tournez la page, svp →

Exercice II 23

Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Justifier que pour tout $x \in]0,1[$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ converge. 2

   On pose alors, pour tout $x \in]0,1[$, $f_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

   L'objectif de ce problème est de donner un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1.

   Pour tout $x \in]0,1[$, on considère l'intégrale : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

2. Justifier que, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $I(x)$ est convergente. 1+2+2.

3. On définit maintenant la fonction d'Euler Γ par : $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ où s réel à déterminer.

   (a) Donner l'ensemble de définition de Γ. 2

   (b) Pour tout $x \in]0,1[$, déterminer une expression de $I(x)$ faisant intervenir $\ln(x)$, α et $\Gamma(1-\alpha)$. *On pourra penser à un changement de variable* 4

4. Prouver que, pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t^\alpha}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. 2

5. En déduire, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t. \quad 4$$

6. En déduire un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1. 4

Exercice 3

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty,-1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 3

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. 2

* * * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k\,\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$. 2

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t. \quad 2 \quad 1$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$. 2.

6. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$. 2

7.

7.1. Calculer $L(e_0)$. 2

7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\,L(e_k)$. 4

7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n. 2

8. Prouver que L est un automorphisme de E_n. 2.

9. **Recherche des sous-espaces propres de L**
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$. 2

9.2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ $(*)$. 2.

9.3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$. 2.

9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$. 4

9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés. 4
L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

10. Comparer L^{-1} et $D+$ Id. 4

11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base $\mathscr{B}$. 2

12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1}. Retrouver alors les valeurs propres de L. 2+2.