Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 13 Janvier 2024
Sujet Niveau I
Durée : 4 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Exercice I

On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
On rappelle aussi que si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, alors le produit AB est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^t\!V_0$.
   (a) Donner les entiers p et q tels que $U_0 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et ${}^t\!V_0 \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Quel est alors le nombre de colonnes et le nombre de lignes de A_0 ?
   (b) Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?
   (c) Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.
   (d) i. Calculer A_0U_0.
   ii. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   iii. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
   $A_0 = PDP^{-1}$.
2. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   (a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.
   Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 \cdots l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.
   (b) Vérifier que $LC = \mathrm{tr}\,(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{tr}\,(A)A$ où $\mathrm{tr}\,(A)$ désigne la trace de A.
   (c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.
   Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}\,(A)\lambda\right) X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{tr}\,(A)\}$.
   (d) Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
   (e) Vérifier que $\mathrm{tr}\,(A)$ est valeur propre de A.
   (f) Montrer que : A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{tr}\,(A) \neq 0$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}\,(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
   On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.
   (a) Justifier que :$\forall x \in E, \exists \alpha \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha u$
   (b) Montrer que $f(u) \neq 0$.
   (c) En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.
   (d) Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice II

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.
   On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.
2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

   5.2.

   5.2.1 Montrer que : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in J$,

$$\left|\varphi(x) - \ell - \frac{a}{\sqrt{x}}\right| \leqslant M \frac{1}{x^{3/2}}$$

   5.2.2 En déduire que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Exercice III

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

1. **Dans cette question, et uniquement cette question**, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$.

   1.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

   1.2. En déduire $I(\lambda)$ converge si et seulement si $\lambda = 1$.

   1.3. Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini. *On écrira* $f(t) = f(t) - 1 + 1$
2. Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$. *Indication : considérer* $I(\lambda) - I(\mu)$
3. Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\, \mathrm{d}t$.

   3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et justifier que $H'_\lambda(x) = \lambda - f(x)$.

   3.2. On suppose que H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$.

   3.2.1 Démontrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

3.2.2 En déduire que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique ($T > 0$).

4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante. *On pourra considérer une primitive F de f, écrire φ à l'aide de F et calculer φ'.*

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

4.2.

4.2.1 Montrer que la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} H_\lambda(a+nT)$?

4.2.2 En déduire qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

i. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 4.

ii. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.