Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 13 Janvier 2024
Sujet Niveau II
Durée : 4 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Problème I

Notations

- Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.
- Étant donnés deux entiers naturels a et b, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.
- Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, la notation $u_m = \mathrm{O}(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(\mathrm{M}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que l'on ait

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geqslant m_0, \quad u_m = \mathrm{M}_m v_m$$

- On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

I – Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.1

Q 1. Montrer que

$$\mathrm{I}_n \geqslant \frac{1}{2^n}$$

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Q 3. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

`On pourra minorer` $1+t^2$ `par un polynôme de degré` 1.

Q 4. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\mathrm{I}_n \sim \mathrm{K}_n$$

Q 5. Établir la relation de récurrence $\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n+1} + \dfrac{1}{2n}\mathrm{K}_n$.

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.2)

Q 7. Justifier que

$$\sqrt{n}\mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u$$

Q 8. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Q 9. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{puis de} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

II – Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. En écrivant que $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$$

Q 11. À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Q 12. En déduire un équivalent simple de $1-\Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Problème 2
Notations et rappels

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à n lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de M, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et on appelle noyau de M, noté $\ker M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\operatorname{rg}(M)$ son rang, $\operatorname{tr}(M)$ sa trace, χ_M son polynôme caractéristique et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On rappelle que M et $M^\top$ ont le même rang et le même déterminant.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f. On définit la suite des puissances de f en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

Si $\Pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que $\Pi(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Lorsque $M_1, \ldots, M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_k$, on note $\operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_k)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + \ldots + n_k$, diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
— conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{rg}(M)$;
— conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\big(\Phi(M)\big) = \det(M)$;
— conserve la trace si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{tr}(M)$;
— conserve le polynôme caractéristique si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$.

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

On rappelle la propriété suivante : Soient trois bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^n$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, alors il existe deux matrices P, Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(f) = P\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1}Q$

I Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note Γ_A l'application

$$\Gamma_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

Q 1. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Γ_A appartient à $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

Q 2. Démontrer que, si A appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors Γ_A conserve le rang.

Q 3. Démontrer que l'application

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) \\ A & \mapsto & \Gamma_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

Dans la suite de cette sous-partie I.A, A est un élément fixé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 4. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$.

Q 5. En déduire que, pour tout polynôme Π de $\mathbb{R}[X]$, $\Gamma_{\Pi(A)} = \Pi\left(\Gamma_A\right)$.

Q 6. À l'aide du résultat précédent, démontrer que A est diagonalisable si et seulement si Γ_A est diagonalisable.

Q 7. Démontrer que χ_A est un polynôme annulateur de Γ_A et que χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de A.

Q 8. En déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\Gamma_A\right) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

I.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable

Pour toutes matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \right.$$

$$\Psi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM^\top Q \end{array} \right.$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{\Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{\Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2\right\}.$$

Q 9. Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall\,(\Theta, \Theta') \in \left(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2\right)^2, \qquad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

I.B.1) Soient P et Q deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Q 10. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.

Q 11. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

Q 12. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

Q 13. Montrer que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

I.B.2) Dans cette section, on prend $n \geqslant 2$.

Q 14. Montrer que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$.

Q 15. En déduire que les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

II Endomorphismes de rang donné

On suppose que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker(f)$.

II.A – On suppose dans cette sous-partie que f est un isomorphisme. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}'$ la base

$$\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

Q 16. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

II.B – On suppose dans cette sous-partie que f n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f)$, que l'on complète (à gauche) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 17. Montrer que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_k)\big)$ est libre.

Q 18. Justifier que $k < n$.

On complète la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_k)\big)$ en une base $\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_k), f_{k+1}, \dots, f_n\big)$ de $\mathbb{R}^n$.

Q 19. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

II.C – Dans toute la suite du problème, pour tout entier entier naturel $r \in [\![0, n]\!]$, on note

$$J_{n,r} = \mathrm{diag}\,(I_r, 0_{n-r})$$

en convenant que $J_{n,n} = I_n$ et $J_{0,n} = 0_n$.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

Q 20. Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \Phi_{P,Q}\,(J_{n,r})\,.$$

II.D – On suppose dans cette sous-partie que $n = 2$ et que A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1. On suppose que $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{Im}\, B$ sont distinctes.

Q 21. Montrer qu'il existe deux matrices P_2 et Q_2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \qquad \text{et} \qquad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

où α et β sont des réels, non tous deux nuls.

III Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 2$.

On désigne par $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III.A –

Q 22. Expliciter la matrice de la transposition $\mathcal{T}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sera notée T.

Q 23. Justifier sans calcul que T est diagonalisable

Q 24. Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{T}$.

On se donne deux éléments P et Q de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Q 25. Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi_{P,Q}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix},$$

où U est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

On suppose dans la suite de cette partie que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang.

III.B –

Q 26. Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 27. Déterminer les rangs de $\Phi(B_1)$, $\Phi(B_4)$, $\Phi(B_1 + B_4)$. En déduire l'existence de deux matrices P_1 et Q_1 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$\Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

On adopte alors les notations suivantes : $\Phi' = \Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi$, $M' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}}(\Phi')$.

Pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $B'_j = \Phi'(B_j)$ et $C_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)^\top$ désigne la j-ième colonne de la matrice M'.

Q 28. Déterminer C_1 et C_4.

Q 29. Démontrer que $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_i d_i - b_i c_i = 0$.

Q 30. En considérant le rang des matrices $B'_1 + B'_2$ et $B'_1 + B'_3$, démontrer que $d_2 = d_3 = 0$.

On déduit des deux questions précédentes que $b_2 c_2 = b_3 c_3 = 0$.

III.C – On suppose dans cette sous-partie que $c_2 = 0$.

Q 31. En étudiant $\det(M')$, démontrer que les nombres b_2, c_3, d_4 sont tous trois non nuls.

Q 32. En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant les rangs des matrices $B'_3 + B'_4$, $B'_2 + B'_4$ et $B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4$, démontrer que

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

avec $c_4 = a_2 c_3$ et $d_4 = b_2 c_3$.

Q 33. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_1$.

III.D – On suppose à présent que $c_2 \neq 0$.

Q 34. Démontrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi' \circ \mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Q 35. Démontrer que $c_3 = 0$.

Q 36. En déduire que Φ appartient à $\mathcal{L}_2$.

On a ainsi démontré, pour $n = 2$, qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

On admet que ce résultat est encore valable lorsque n est un entier strictement supérieur à 2.