Devoir Surveillé $n°5$

PSI

MATHEMATIQUES

Samedi 13 Janvier 2023

(Durée : 4 heures)

Documents, calculatrice et portables interdits

EXERCICE I

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \; dt$$

2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{\pi^2}{8}$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

EXERCICE II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, \mathrm{d}x$$

1. Calculer W_0.
2. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1, W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2}.$$

3. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} W_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5. (a) Montrer que $\forall n \geq 2, \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1 + t^2$.

   (b) Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

6. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$
A l'aide du changement de variable, $t = \sqrt{n}\tan x$, vérifier que
$$I_n = \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

7. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Problème

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :
$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}$$
On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2. Puis on introduit dans la partie III des intégrales auxiliaires afin d'obtenir de façon plus générale des équivalents de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

Partie I : premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).

1. *Étude du cas particulier de la fonction S_1.*
   (a) Étudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :
   $$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}.$$
   (b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.
   (c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.
2. *Étude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*
   Etablir que le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$ est $]0, +\infty[$
3. *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*
   (a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \left(x \mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).
   (b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leqslant y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
   En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.
   (c) À l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = 1$.
   (d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$ (que l'on justifiera) pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que : $\lim\limits_{x\to 0} S_\alpha(x) \geqslant N + 1$.
   Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 ?
   (e) Déduire de ce qui précède que la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(x \mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

Partie II : Étude de la fonction S_2.

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall x > 0, \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^2}$$

4. *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0.*
   (a) Établir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:
   $$e^{-x(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} e^{-xt^2} \mathrm{d}t \leqslant e^{-xn^2}.$$
   (b) En exploitant l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :
   $$\forall x > 0, \quad S_2(x) - 1 \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \leqslant S_2(x).$$
   (c) Retrouver alors $\lim\limits_{x \to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.
5. *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$.*
   (a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :
   $$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}.$$
   (b) En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o}(e^{-x})$.
   En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie III : étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$.

6. *Comparaison de deux intégrales.*
   On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :
   $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} \mathrm{d}u, \quad \text{et} \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} \mathrm{d}t.$$
   (a) Pour quelles valeurs de α les intégrales $\displaystyle\int_0^1 e^{-u} u^{\alpha-1} \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} \mathrm{d}u$ convergent-elles ?
   En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha + 1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
   Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n + 1)$ pour tout entier naturel n.
   (c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = xt^\alpha$.
   Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$?
7. *Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$).*
   (a) En raisonnant comme à la question 4.(a), établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :
   $$0 \leqslant S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 1.$$

(b) Retrouver $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x)$, puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

8. *Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$).*

(a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u.$$

(b) Établir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u = e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\mathrm{d}u.$$

Justifier ensuite l'inégalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u.$$

En déduire enfin l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

(c) En conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\mathrm{d}t$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

9. *Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$).*

(a) Établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.