Devoir Surveillé $n°5$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 17 Février 2024
Sujet Niveau I
Durée : 4 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)dt$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.
2. En citant le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.
4. Déterminer alors la $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
   On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J que l'on ne cherchera pas à calculer.
5. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.
6. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} I_n x^n$.
   6.1. Déterminer le rayon de R de cette série entière.
   6.2. On pose pour tout x réel et lorsque cela est possible $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.
   Donner l'ensemble de définition de f.

Problème 1 - Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n + 1) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Problème 2 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. Á chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0, 1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ u $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t.

Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Partie I - Un développement en série entière

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.
2. En déduire que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathrm{P}(S_n = 0).$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathbb{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n.

Dans cette partie, on souhaite déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?
7. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j}. En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} (4p(1-p))^j.$$

8. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la **Q2**, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.
9. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.