Devoir Surveillé $n°5$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 17 Février 2024
Sujet Niveau II
Durée : 4 heures
(Documents, calculatrice et portables interdits)

I. Préliminaire

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$$

II. Identité de Karamata

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel $x \in]-1,1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge absolument. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on note $f(x)$ la somme de cette série et l'on suppose que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x) = \sqrt{\pi}$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}$$

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

et calculer sa valeur. En déduire l'égalité :

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\, dt$$

On admettra que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\pi}$.

4. Montrer que pour toute application polynomiale réelle Q, on a

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\, dt$$

Soit h la fonction définie, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in [0, e^{-1}[\\ \frac{1}{x} & \text{si } \ x \in [e^{-1}, 1] \end{cases}$$

5. Justifier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\, dt$$

et donner sa valeur.

6. Soit $x \in [0, 1[$. Justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.
   On admet l'égalité (dite de Karamata) :

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} h(e^{-t})}{\sqrt{t}} \, dt$$

7. En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

III. Théorème taubérien

On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de réels positifs et, pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On fait l'hypothèse que

$$S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

On va montrer qu'alors

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On notera $[x]$ la partie entière d'un réel x.

8. Soit α, β un couple de nombres réels vérifiant : $0 < \alpha < 1 < \beta$. Pour tout entier naturel n tel que $n - [\alpha n]$ et $n - [\beta n]$ soient non nuls, justifier l'encadrement

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$$

9. Soit γ un réel strictement positif. Déterminer les limites des suites de termes généraux

$$\frac{n}{[\gamma n]} \quad \text{et} \quad \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}}$$

10. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel n assez grand, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon$$

11. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} a_n = 1$.

IV. Marche aléatoire

On considère $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On définit les applications coordonnées, pour tout $i \geq 1$,

$$X_i \ : \ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega \mapsto \omega_i \in \mathbb{Z}$$

On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 0)$ par

$$S_0(\omega) = 0,\ S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$\begin{array}{rccl} T: & \Omega & \to & \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ & \omega & \to & \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } \ S_n(\omega) \neq 0,\ \forall n \geq 1 \\ \inf\{n \geq 1,\ S_n(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

Pour tout entier naturel n, on note $E_n = \{T > n\}$, pour $n \geq 1$, $A_n^n = \{S_n = 0\}$ et pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\}$$

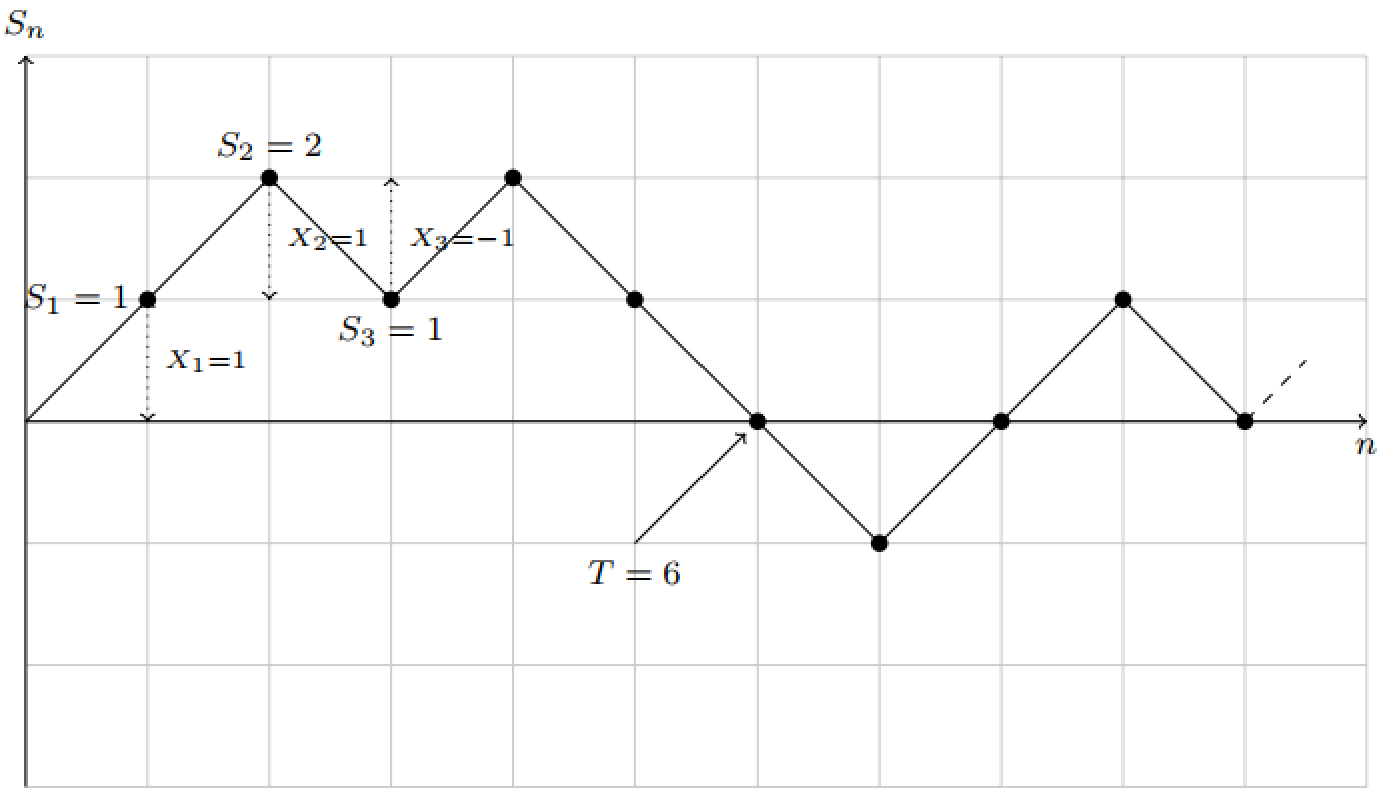

FIGURE 1. Notations : ici ω commence par $(1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1)$.
ω appartient à A_6^6 et A_8^8 ainsi qu'à $A_0^1, A_0^2, \cdots, A_0^5, A_6^7$ etc

12. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(i_1, \ldots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k})$$

13. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(j_1, \ldots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ que

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k})$$

Indication : on pourra considérer l'application

$$\theta : (z_1, \ldots, z_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k} \mapsto \left(z_1, z_1 + z_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n-k} z_j \right) \in \mathbb{Z}^{n-k}$$

14. En déduire que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

15. Montrer l'égalité

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

16. Pour tout réel x de $]0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n\right)$$

17. Pour tout entier naturel n, calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$.
Indication : on discutera suivant la parité de n.
18. En déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

19. A l'aide des résultats obtenus dans les parties précédentes déterminer, quand l'entier naturel n tend vers l'infini, un équivalent de $\mathbb{P}(E_n)$.
20. Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.
21. Pour tout réel $x \in [0, 1]$, prouver l'égalité :

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n$$

22. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$