Devoir Surveillé $n°6$
PSI
MATHEMATIQUES
Mardi 10 avril 2024
Sujet Niveau I
Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage de calculatrice, documents et tout dispositif électronique est interdit

Le sujet est composé d'un exercice et deux problèmes indépendants.
L'énoncé de cette épreuve comporte quatre pages.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice

Présentation générale

On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2, on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble de matrices orthogonales.

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité d'ordre n.
Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n et par $O_n(\mathbb{R})$ celui de matrices réelles orthogonales de taille n. Le groupe *spécial orthogonal* est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.

Partie I - Un exemple en dimension 2

1. Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.
2. Calculer $R = (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.
3. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
   (a) En s'aidant du polynôme caractéristique de $I_2 + R_\theta$, montrer que $I_2 + R_\theta$ est inversible et donner son inverse en fonction de $\tan \frac{\theta}{2}$.
   (b) Calculer $M = (I_2 + R_\theta)^{-1}(I_2 - R_\theta)$. Quelle propriété a M ?

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier > 0.

4. Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons
$$ {}^t(AX)\overline{X} $$
   Montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).
6. Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et
$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$
   Montrer que $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est une matrice orthogonale.
7. Calculer le déterminant de $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ où A est antisymétrique réelle.
8. Soit R une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible. Démontrer que la matrice $A = (I_n + R)^{-1}(I_n - R)$ est antisymétrique.
9. On suppose ici que $n = 3$ et que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée par la base canonique. Soit r une rotation d'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ autour d'un axe orienté par un vecteur u de norme 1 et soit $R \in O_3(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique.
   Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$R = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A)$$

Problème 1

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$

4. Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.
7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10. Justifier que P_k est de degré k.
11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.*on pourra utiliser la dérivée de* $u(t) = tP'(t)e^{-t}$.
13. En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$. Que peut-on dire alors pour α ?
14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

Problème 2

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie 1 : résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ désigne une fonction continue 2π-périodique telle que

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\ dt = 0$$

1. Si $f \ : \ [0, \pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\ dt = 0$$

   On pourra faire une intégration par partie pour utiliser le théorème d'encadrement

2. Montrer que la primitive de φ s'annulant en 0 est 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, montrer alors que pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt = 0$$

3. Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h \ : \ [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soient $\varepsilon > 0$ et $g \in C^1([\alpha, \beta])$ telle que $\|h - g\|_\infty^{[\alpha,\beta]} \leq \varepsilon$. Montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de φ telle que

$$\left| \int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\ dt \right| \leq M|\beta - \alpha|\varepsilon + \left| \int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\ dt \right|$$

   En déduire que pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et toute fonction $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\ dt = 0$$

   On pourra d'abord démontrer ce résultat pour f continue en utilisant le théorème de Weierstrass, que l'on admet, qui affirme que, pour toute fonction continue f sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin^2(nt)\ dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\ dt$$

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F \ : \ x \mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ soit bornée.

5. Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\ dt$ puis $\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\ dt$ sont convergentes et que

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\ dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\ dt - \frac{F(a)}{a}$$

6. Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ sont convergentes et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit absolument convergente.

7. Montrer que la fonction

$$\mathcal{L}(f) \ : \ x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

8. On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Désormais, on pose $f \ : \ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

9. (a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$

   (b) On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe C^2 et vérfient

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$

   Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)\,dt$ et $\beta(x) = \int_x^{+\infty} f_2(t)\,dt$ où f_1, f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

   (c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$.

   (d) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

10. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

11. Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+. En déduire que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

12. Déduire des questions précédentes que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

FIN DU PROBLÈME