

Devoir Surveillé n°6
PSI
MATHEMATIQUES
Mardi 10 avril 2024
Sujet Niveau II
Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage de calculatrice, documents et tout dispositif électronique est interdit

Le sujet est composé d'un exercice et deux problèmes indépendants.
L'énoncé de cette épreuve comporte trois pages.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier ≥ 1 . L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera \mathbb{R}^n à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0, x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note \tilde{X} la fonction polynomiale définie sur \mathbb{R} par la formule

$$\tilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = (h_{j,k}^{(n)})_{0 \leq j, k \leq n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive.

On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt$.

On note \mathcal{V} le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n .

2) Montrer que $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si ${}^tX H_n X = \rho_n \|X\|^2$. on pourra utiliser une base orthonormale de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de H_n

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de \mathcal{V} . On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0 H_n X_0 \leq {}^t|X_0| H_n |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.

4) Montrer que $H_n |X_0|$, puis que X_0 , n'a aucune coordonnée nulle.

5) On suppose que $\dim \mathcal{V} \geq 2$ et (X_1, X_1') une famille libre de \mathcal{V}

(a) Construire $Y \in \text{Vect}(X_1, X_1')$ telle qu'une de ses coordonnées soit nulle.

(b) En déduire la dimension du sous-espace propre \mathcal{V} .

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^n et P un polynôme à coefficients réels.

- 6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta$, montrer l'inégalité $\left| \int_{-1}^1 P(t) dt \right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})| d\theta$,
 puis l'inégalité ${}^t X H_n X \leq \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta$.
- 7) En déduire que ${}^t X H_n X \leq \pi \|X\|^2$
- 8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $]0, 1[$ et $T_n : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx) f(t) dt.$$

- 9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E , dont 0 est valeur propre.
 (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)
 On remarquera que $T_n(E) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$
- 10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\tilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.
 On pourra remarquer que $T_n(\tilde{X})(x) = {}^t X H_n X$.

On note \mathcal{A} l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0, 1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0, 1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n .

- 11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n , montrer que

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{x \in]0, 1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx) \varphi(t) dt$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$r_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx) \varphi(t) dt,$$

$$J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx} dt,$$

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}.$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur \mathbb{R}_+^* par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) && \text{pour tout } x > 0. \\ \Gamma(n) &= (n-1)! && \text{pour tout entier } n > 0. \\ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt && \text{pour tous réels } \alpha > 0, \beta > 0. \end{aligned}$$

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ'_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathcal{A}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1) \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{t^n (1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt$$

où c est un coefficient à déterminer et où φ' désigne la dérivée de φ . (On pourra traiter à part le cas $n=0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x) = 0$ et où l'on montrera que $c = \varphi(0)$.)

14) Dédurre des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J'_n(x) = c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{t^n (1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt.$$

15) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y' = -\gamma y$ sur l'intervalle $[0, 1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0) = 1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\Phi'_n(x) = -(\gamma+1) \frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ .

17) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt.$$

18) En déduire que pour $n \geq 1$,

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0, 1[} \sup_{x \in]0, 1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1 - \theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt$$

$$\text{où l'on a posé } \theta_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}.$$

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0, 1[} \theta_n^{(1-\alpha)/n} \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n \leq 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2 \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^{1/2n}$

20) Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n \arcsin \frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

FIN DU PROBLÈME