Devoir Surveillé $n°8$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 25 Mars 2023
(Durée : 4 heures)

Documents, calculatrice et portables interdits

Niveau CCINP

Exercice I : Applications directes du cours

Q1. Montrer que l'application définie par $N(A) = \sqrt{\text{tr}\,({}^tAA)} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2. Soit J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $N(J)$.

Q3. Montrer que , pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}\,(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\text{tr}\,({}^tAA)}$.

Q4. Préciser les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles l'inégalité précédente devient une égalité.

Exercice II : Polynôme de Laguerre

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\text{d}t.$$

Q1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.

Q2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t}\text{d}t.$$

Q4. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

Q7. En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}\,(\alpha) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Q8. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

Q9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Q10. Justifier que P_k est de degré k.

Q11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q12. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

Q13. En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

Q14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser les questions **Q9** et **Q13**.

Exercice III : Polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

Q1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.

Q2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

la fonction f étant défénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$. On admet que $(P, Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q3. **Une famille orthogonale**

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|.\|$.

(a) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n \rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0 \rangle$.

(b) En déduire que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

Exercice IV : Exponentielle de matrices dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes, $GL_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$,$\mathscr{D}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

Q1. (a) Montrer que $GL_2(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que $GL_2(\mathbb{C})$ est un dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

(c) Montrer que $\mathscr{D}_2(\mathbb{C})$ est ni un fermé, ni un ouvert de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

(d) Montrer que l'application $\|.\|_\infty : A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \mapsto \|A\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant 2} |A_{i,j}|$. est une norme sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

(e) Montrer que, pour tout $(A,B) \in (\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant 2\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

(f) Soit N une autre norme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Justifier qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))^2, N(AB) \leqslant cN(A)N(B)$$

Q2. Pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k$.

(a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n\|A\|_\infty^n}{n!}$ converge. Quelle est sa somme ?

(b) Justifier que : $\forall A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}), \forall (i,j) \in [\![1,2]\!]^2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\mid A^n[i,j] \mid}{n!}$ converge (où $A^n[i,j]$ désigne le (i,j) ième coefficient de la matrice A^n).

(c) En déduire que la suite $(E_n(A)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite par $exp(A)$ appelée exponentielle de A.

Q3. On suppose qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ converge vers une matrice A. Montrer, en utilisant la continuité d'une application à définir , que pour tout couple (B,C) d'éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, la suite $(BA_nC)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice BAC.

Q4. Soit $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

(a) Pour tout entier n, exprimer $E_n(PAP^{-1})$ à l'aide de $E_n(A), P, P^{-1}$.

(b) En déduire une relation entre $exp(PAP^{-1})$ et $exp(A)$.

Q5. Dans cette question, on pose $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ où α et β sont des complexes.

(a) Pour tout entier n, calculer D^n.

(b) En déduire l'expression de $E_n(D)$ puis celle de $exp(D)$.

Q6. Dans cette question, on pose $T = \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où α et μ sont des complexes et $\mu \neq 0$.

(a) Pour tout entier n, calculer T^n.

(b) En déduire l'expression de $E_n(T)$ puis celle de $exp(T)$.

Q7. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $\det(exp(A)) = e^{\operatorname{tr}(A)}$. En déduire que $exp(A) \in GL_2(\mathbb{C})$.