

Niveau Mines

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur \mathbb{R} .

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Etant donné un intervalle I de \mathbb{R} , on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Etude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.
2. A l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E .

5. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F .

On fixe (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de F , et x un vecteur de E .

6. Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

7. Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

9. En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α , l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ est convergente.

10. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers \mathbb{R} .

11. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α .

Pour tout entier naturel n , on définit les fonctions :

$$\varphi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2 .

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α , ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx.$$

14. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α .

Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } f \in E_\alpha.$$

15. Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout entier $k \in [[0, n-1]]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

16. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k , on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N .

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.

19. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

Dans toute la suite, on note \mathcal{P} le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$.

22. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

23. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ ($A > 0$). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 22 à la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(\sqrt{x}) e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

On peut montrer que le résultat de la question 23 est en réalité valable pour tout fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur \mathbb{R} .