

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème. Vous les traiterez dans l'ordre de votre choix mais d'un seul tenant.
- Le barème prévu pour ce devoir est de 15 points pour chaque exercice et de 30 points pour le problème. 1 point sera attribué aux élèves qui auront utilisé les quantificateurs de façon satisfaisante.
- Deux points sera attribués aux élèves qui auront soigné la rédaction et la présentation leurs copies, en particulier il est demandé d'**encadrer les résultats**.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

**Exercice n° 1** 

---

Les questions de cet exercices sont indépendantes.

1. On considère la fonction définie par l'expressions  $f(x) = (\cos x)^x$ .
  - a) Donner le domaine de définition de  $f$ .
  - b) Donner le développement limité de  $f$  à l'ordre 4 en 0.
2. On considère la fonction définie par l'expression  $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$ .
  - a) Donner le domaine de définition de  $g$ .
  - b) On travaille dans un repère. Justifier que la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote en  $+\infty$  ; préciser l'équation de l'asymptote ainsi que les positions relatives des deux courbes.
3. On considère la fonction définie par l'expression  $h(x) = \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ .
  - a) Donner le domaine de définition de  $h$ .
  - b) Justifier que  $h$  admet un prolongement de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0.
  - c) On travaille dans un repère. Donner l'équation de la tangente à la courbe de  $h$  en 0. On précisera les positions relatives des deux courbes.
4. L'objectif de cette question est de calculer  $I = \int_0^1 \frac{x^3 + 3}{x^3 + x + 2} dx$ .
  - (a) Donner le domaine de définition de  $x \mapsto \frac{x^3+3}{x^3+x+2}$ , justifier que  $I$  est bien définie.
  - (b) Déterminer la décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}$  de  $\frac{X^3 + 3}{X^3 + X + 2}$ .
  - (c) Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 2} dx$ .
  - (d) En déduire  $I$ .

## Exercice n° 2

---

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ .

### 1. Etude de $A$ :

Soit les matrices  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- Prouver que  $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ .
- Déterminer  $P^{-1}$ .
- Calculer  $PDP^{-1}$ .
- En déduire une expression pour  $A^n$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ).

### 2. Application à l'étude de deux suites :

Soit  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ , on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : 
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{cases}$$

- Calculer  $u_1$  et  $v_1$ .
- On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . Exprimer  $X_{n+1}$  en fonction de  $A$  et de  $X_n$ .
- En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $u_0, v_0$  et  $n$ .
- Etudier le comportement asymptotique des deux suites  $u$  et  $v$ .

### 3. Application à l'étude d'un système différentiel :

On cherche à résoudre le système de deux équations différentielles 
$$\begin{cases} y' = -y + 2z \\ z' = -4y + 5z \end{cases} \quad \text{où } y \text{ et } z \text{ désignent deux fonctions inconnues, définies et dérivables sur } \mathbb{R}.$$

On pose  $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  et  $X' = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}$  c'est-à-dire que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  et  $X'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ .

On va raisonner par analyse-synthèse.

- Supposons qu'il existe des fonctions  $y$  et  $z$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  qui satisfassent le système différentiel. Donner une relation entre  $A$ ,  $X$  et  $X'$ .
- On pose  $X_1 = P^{-1}X$ . Prouver que  $X'_1 = DX_1$ .
- On pose  $X_1 = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ . Déterminer des expressions pour les fonctions  $f$  et  $g$ , en déduire  $y$  et  $z$ .
- Faire la synthèse.

# PROBLÈME

Les trois parties du problème sont partiellement liées. Plus précisément :

- La première partie propose des questions indépendantes qui serviront dans les deux parties suivantes.
- La deuxième partie introduit une famille de polynômes : les polynômes de Tchebychev et propose d'en établir quelques propriétés.
- Dans la troisième partie, on se sert des polynômes de Tchebychev pour contrôler l'instabilité numérique de l'interpolation de Lagrange qui a été vue en devoir maison.

## Partie A : Notations, résultats préliminaires

1. Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[-1; 1]$ , justifier l'existence de  $\max_{x \in [-1; 1]} |f(x)|$ , qu'on notera  $\|f\|_\infty$  dans la suite du problème.
2. Soit  $P, Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ . Prouver que si  $\forall x \in [-1; 1], P(x) = Q(x)$  alors  $P = Q$ .  
En vertu de ce résultat, dans la suite du problème on identifiera polynôme formel et fonction polynomiale définie sur  $[-1; 1]$ .
3. Soit  $a$  et  $b$  deux réels. En utilisant l'angle moitié, factoriser  $\cos a + \cos b$ .
4. *Question de cours qui ne sert pas dans le problème :*  
Soit  $-1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1$ , (avec  $n \geq 3$ ).  
a) Donner, pour  $1 \leq i \leq n$  des polynômes  $L_i(x)$  qui vérifient :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On rappelle que ces polynômes sont les polynômes de Lagrange associés aux points  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

- b) Soit  $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Donner un polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $\forall 1 \leq i \leq n, P(a_i) = f(a_i)$ .  
On rappelle que ce polynôme est unique, c'est le polynôme interpolateur de  $f$  aux nœuds  $((a_i, f(a_i)))_{1 \leq i \leq n}$ .

## Partie B : Polynômes de Tchebychev

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit, pour  $x \in [-1; 1]$ , la fonction  $T_n(x) = \cos(\arccos(x))$ .

1. Calculer  $T_0$  et  $T_1$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que, pour tout  $x \in [-1; 1]$  on a  $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2xT_{n+1}(x)$ .
3. En déduire, pour  $x \in [-1; 1]$  des expressions polynomiales de  $T_2(x)$  puis de  $T_3(x)$ .
4. Prouver que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  est une fonction polynomiale.
5. Déterminer, en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$ , le degré de  $T_n$ , son coefficient dominant ainsi que son coefficient constant.
6. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - a) Prouver que, pour tout  $\theta \in [0; \pi]$ ,  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .
  - b) Résoudre, sur  $[0; \pi]$  l'équation  $\cos(n\theta) = 0$ .
  - c) Prouver que  $T_n$  est scindé, donner son écriture comme produit de facteurs irréductibles.
  - d) Prouver que :

$$\prod_{i=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

7. Prouver que  $\|T_n\|_\infty = 1$  (on pourra procéder en montrant  $\|T_n\|_\infty \leq 1$  et  $\|T_n\|_\infty \geq 1$ ).
8. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $V_n = 2^{1-n}T_n$ .  
Justifier que  $V_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  et que  $\|V_n\|_\infty = 2^{1-n}$ .
9. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'objectif de cette question est de prouver que, parmi tous les polynômes unitaires de degré  $n$ ,  $V_n$  est celui qui minimise la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme  $P$  qui soit unitaire et de degré  $n$  tel que  $\|P\|_\infty < 2^{1-n}$ .
  - a) Prouver que  $\deg(V_n - P) \leq n - 1$ .
  - b) Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , on pose  $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ . Donner le signe de  $(V_n - P)(x_k)$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ .
  - c) Conclure.

### Partie C : majoration de l'erreur dans l'interpolation polynomiale

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{C}^n([-1; 1], \mathbb{R})$ .

Soit  $-1 \leq a_1 < \dots < a_n \leq 1$  et  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  le polynôme interpolateur de  $f$  aux points  $a_1, \dots, a_n$ .

On a donc, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $P(a_i) = f(a_i)$ .

Soit le polynôme  $S(x) = \prod_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} (x - a_i)$

1. Soit  $\phi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda S(x)$ . Soit  $t \in [-1; 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ .
  - a) Justifier qu'il est possible de choisir  $\lambda$  tel que  $\phi(t) = 0$ .  $\lambda$  est ainsi fixé dans la suite de cette question.
  - b) Montrer que  $\phi$  s'annule au moins  $n + 1$  fois sur  $[-1; 1]$ .
  - c) En déduire que  $\phi^{(n)}$  s'annule au moins une fois sur  $[-1; 1]$ .
  - d) Déterminer une expression de  $\phi^{(n)}$  en fonction de  $f^{(n)}$ ,  $n$  et  $\lambda$ .
  - e) En déduire qu'il existe  $a \in [-1; 1]$  tel que  $f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} S(t)$ .
2. Déduire que, pour tout  $t \in [-1; 1]$ ,  $|f(t) - P(t)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} |S(t)|$ .
3. Pour quel choix de  $a_1, \dots, a_n$  a-t-on  $\|S\|_\infty$  qui est minimale ? Prouver qu'on a alors :

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} 2^{1-n}$$