

Mathématiques - Devoir Maison 14

À remettre par binômes ou de façon individuelle le mardi 28 avril.

Le devoir sera remis sous forme d'un unique fichier .pdf que vous pouvez produire facilement à l'aide d'une application sur smartphone (CamScanner sur android ou Scannable sur iOS, par exemple).

On cherche à trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2 - 1) = P(X + 1)P(X - 1)$: (\star) .

Analyse : Supposons qu'il existe un polynôme non constant P qui vérifie la relation (\star) .

1. Justifier l'existence de $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.
2. Prouver que $a^2 + 2a$ et $a^2 - 2a$ sont également des racines de P .
3. On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :
$$\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n \end{cases}$$
Justifier que tous les termes de la suite sont des racines de P .
4. (a) Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, que dire des variations de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? En déduire que a n'est pas un réel strictement positif.
(b) Justifier que a ne peut pas être un réel strictement négatif.
5. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a + 1)^{2^n}$.
6. Déduire de la question précédente que $|a + 1| = 1$.
7. On admet qu'on a également $|a - 1| = 1$; quelles sont les valeurs possibles pour a ?

Synthèse : Conclure.
