e3a 2015 - PSI 1

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_x\ :\ t \mapsto \frac{1}{t^x\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. On a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 1 et de $+\infty$.
   Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ et il y a intégrabilité ssi $x > 0$ (fonctions de Riemann).
   Au voisinage de 1^+, $f_x(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ est intégrable.
   f_x étant positive, l'existence de l'intégrable équivaut à l'intégrabilité et donc
$$I = \mathbb{R}^{+*}$$

2. $x \mapsto \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente en $+\infty$ à e^{-x} et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. L'intégrale proposée existe donc. On a
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = [\arctan(e^x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

3. $u \mapsto \mathrm{ch}(u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée ne s'annule pas. Il est donc licite de poser $t = \mathrm{ch}(u)$ dans l'intégrale qui définit $f(1)$. On obtient par CDV généralisé la convergence étant assurée par Q1 :
$$f(1) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)\sqrt{\mathrm{ch}^2(u) - 1}}\, du = \int_0^{\infty} \frac{2du}{e^u + e^{-u}} = \frac{\pi}{2}$$

4. Le même changement de variable donne
$$f(2) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\mathrm{ch}^2(u)} = \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{\mathrm{sh}(u)}{\mathrm{ch}(u)}\right]_0^B = 1$$
   On a utilisé $\mathrm{ch}(u) \sim e^u/2 \sim \mathrm{sh}(u)$ *au voisinage de* $+\infty$.

5. $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive entre deux bornes "dans le bon sens". Ainsi
$$\forall x > 0,\ f(x) \geq 0$$
   Comme la fonction intégrée est continue, positive et non nulle, on peut même dire que
$$\forall x > 0,\ f(x) > 0$$

6. Si $x \leq y$ alors pour tout $t > 1$ on a $f_x(t) \geq f_y(t)$ (avec les notations utilisées en 1). On en déduit en intégrant que $f(x) \geq f(y)$. Ceci montre que f est croissante sur I. Comme ci-dessus, on pourrait même montrer une stricte monotonie.

7. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x \in I,\ t \mapsto f_x(t)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.
   - $\forall t > 1,\ x \mapsto f_x(t)$ est de classe C^1 sur I de dérivée $x \mapsto -\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.
   - $\forall x \in I,\ t \mapsto -\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.
   - $\forall [a, b] \subset I,\ \forall t > 1,\ \left|-\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\right| \leq \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}$. Le majorant est continu sur $]1, +\infty[$, équivalent au voisinage de 1^+ à $\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{2}}$ et donc prolongeable par continuité en 1 (valeur 0), équivalent à $\frac{\ln(t)}{t^{x+1}}$ au voisinage de $+\infty$ et donc négligeable devant $\frac{1}{t^{1+x/2}}$ (croissances comparées puissance-logarithme). Comme $1 + x/2 > 0$, il y a aussi intégrabilité du majorant au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que $f \in C^1(I)$ avec

$$\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

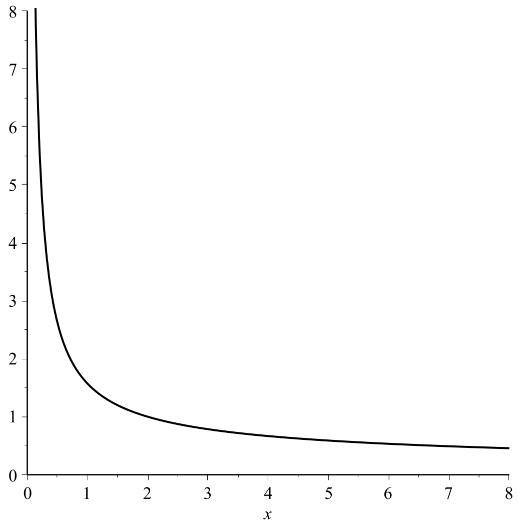
La fonction intégrée ci-dessus est positive et on a donc $f'(x) \leq 0$ ce qui montre à nouveau la décroissance de f sur I.

8. $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$ et $t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ en est une primitive.
   $t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\frac{(x+1)}{t^{x+2}}$.
   $t \mapsto \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.
   On peut donc intégrer par parties pour obtenir
   $$\forall x > 0,\ f(x) = (x+1)\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}\,dt$$
   En écrivant que $\sqrt{t^2-1} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ et comme toutes les intégrales existent, on a alors
   $$\forall x > 0,\ f(x) = (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right)$$
   On en déduit que
   $$f(x+2) = \frac{x}{x+1}f(x)$$
9. Montrons par récurrence que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(2p) = \frac{4^{p-1}(p!)^2}{(2p-1)!}$$
   - Initialisation : le résultat est vrai pour $p = 1$ car $f(2) = 1$.
   - Hérédité : soit $p \geq 2$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $p-1$. On connaît alors $f(2p-2)$ et la question précédente donne $f(2p)$ en fonction de $f(2(p-1))$. On obtient le résultat au rang p en combinant les résultats.
10. Soit $x > 0$. On a
   $$\phi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \phi(x)$$
11. ϕ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme f. On a donc, avec la question précédente,
   $$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \phi(x+1) = \phi(1) = f(1)f(2) = f(1)$$
   Or, $\phi(x) \sim_{0^+} xf(x)f(1)$ et donc $xf(x) \to 1$ quand $x \to 0^+$ et ainsi
   $$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(n) = \phi(1) = \frac{\pi}{2}$ (périodocité de ϕ). Ceci s'écrit
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$$
   D'après lé décroissance et positivité de f,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n+1)^2 \leq f(n)f(n+1) \leq f(n)^2$$
   On en déduit que
   $$\forall n \geq 2,\ \frac{\pi}{2n} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2(n-1)}$$
   Majorant et minorant étant tous deux équivalent à $\pi/2n$ au voisinage de $+\infty$, il en est de même de $f(n)^2$. Et comme on peut élever un équivalent à une puissance constante, on a finalement
   $$f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13. Toujours par décroissance de f, on a $\forall x \geq 1,\ f(\lceil x \rceil) \leq f(x) \leq f(f(\lfloor x \rfloor))$. Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ équivalent tout deux à x au voisinage de $+\infty$ (ils différent de x de moins de 1 qui est négligeable devant x) la question précédente donne que le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ et donc

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

14. On a décroissance de f. La courbe aux voisinage de 0 et de $+\infty$ est proche de celle des fonctions équivalentes trouvées.



15. Avec ce qui précède, ϕ tend vers $\pi/2$ quand $x \to +\infty$. Or, pour tout x on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(x) = \phi(x+n)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x > 0,\ \phi(x) = \frac{\pi}{2}$$