

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Physique-chimie 2

MP

2022

4 heures

Calculatrice autorisée

Les bouées houlographes Waverider

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle. Le fonctionnement du Waverider repose sur une ingénieuse combinaison de principes physiques que ce problème aborde au travers de modèles simples.

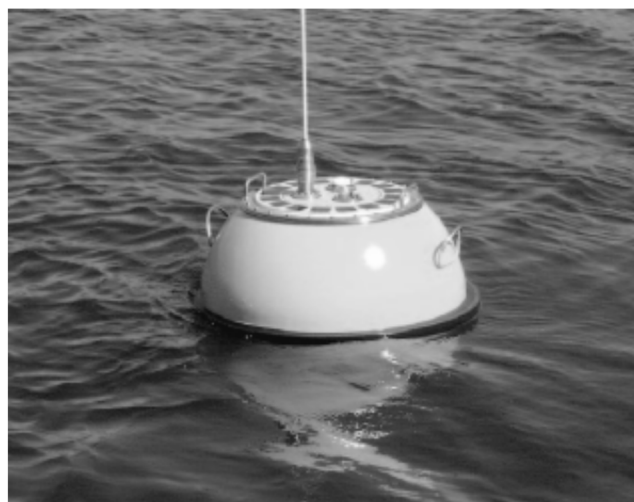


Figure 1 Photographies d'une bouée houlographe Waverider

Cet énoncé, formé de quatre parties largement indépendantes, est accompagné d'un document réponse à utiliser à plusieurs reprises et à rendre avec la copie. Diverses valeurs numériques et un formulaire d'analyse vectorielle sont regroupés à la fin du texte.

Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} A(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

IV Mesure de l'inclinaison de la bouée

Afin de déterminer la direction des vagues, certains Waveriders sont équipés de deux autres accéléromètres, non pas placés sur la plateforme comme le premier, mais *rigidement liés à la bouée*. Lorsque la bouée s'incline sous l'effet de la houle, ces accéléromètres s'inclinent donc aussi. Afin de projeter dans le plan horizontal et sur l'axe vertical les accélérations qu'ils mesurent, il faut déterminer leur orientation relativement à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ définie par la plateforme et son fil de suspension vertical. La mesure de deux angles est pour cela nécessaire, mais nous nous limitons ici au seul angle φ (figure 8).

La mesure de φ s'appuie sur un effet de couplage électromagnétique dans un système de bobines.

- Une paire de bobines plates $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}''_1\}$ est collée à la paroi extérieure de la sphère $\mathcal{S}$. Leur axe de révolution commun est dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}_3$.
- Une bobine-sonde $\mathcal{C}_2$ est fixée sur la plateforme de manière que son axe de symétrie soit confondu avec le fil de suspension vertical.

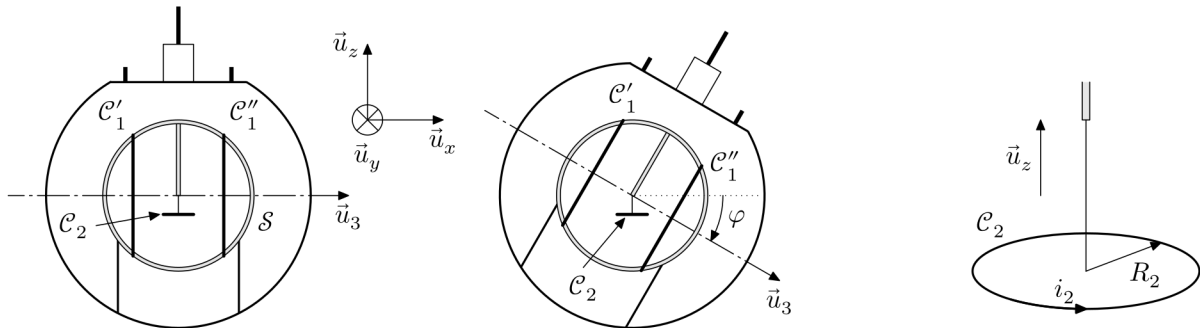


Figure 8 La bouée, la sphère $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}''_1$ s'inclinent alors que $\mathcal{C}_2$ se maintient horizontale et le fil de suspension vertical. À droite : vue agrandie en trois dimensions de la bobine-sonde $\mathcal{C}_2$

IV.A – Champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz

Les deux bobines plates identiques $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}''_1$ sont placées dans la configuration dite « de Helmholtz » : assimilables à deux cercles de centres O'_1 et O''_1 , elles possèdent le même axe de révolution, sont formées chacune de N_1 spires parcourues par un courant d'intensité i_1 et sont séparées d'une distance égale à leur rayon R_1 (figure 9).

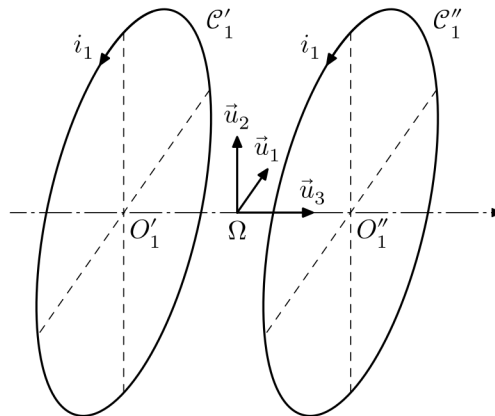


Figure 9 Les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base orthonormée directe

Ce dispositif est réputé produire un champ magnétique presque uniforme dans une région relativement étendue autour du milieu Ω de $[O'_1 O''_1]$. Afin de préciser la justesse de cette affirmation, un calcul numérique du champ magnétique a été conduit avec les paramètres $R_1 = 20$ cm, $N_1 i_1 = 1$ A. Ses résultats sont fournis sur les figures D et E du document réponse. Avant de les exploiter, on s'assure de sa compatibilité avec les lois de l'électromagnétisme.

En plus des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) d'origine Ω , on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) d'axe $(\Omega, \vec{u}_3)$. On voit que x_3 joue le rôle de la coordonnée usuellement notée z , mais on prendra garde à ne pas confondre $\vec{u}_3$ et $\vec{u}_z$ (figure 8). Dans le plan de la figure D, défini par $\theta = 0$, r se confond avec $|x_1|$ et le vecteur unitaire d'habitude noté $\vec{u}_r$ vaut $\pm \vec{u}_1$ selon le signe de x_1 . On note $B_3(r, x_3) = \vec{B}(r, x_3) \cdot \vec{u}_3$, $B_{\text{axe}}(x_3) = B_3(0, x_3)$, $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ et $B_1 = \vec{B} \cdot \vec{u}_1$.

La plupart des questions de cette sous-partie demandent un travail sur les figures du document réponse. On fera clairement apparaître les constructions graphiques qui concourent au raisonnement. Leur lisibilité et la clarté de leur utilisation feront partie des critères de notation de l'épreuve.

Q 36. Comme il est difficile de représenter le champ magnétique en trois dimensions, la figure D se limite au plan $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$. Pourquoi cela ne constitue-t-il pas une perte d'information ? En quels points de ce plan la

direction du champ était-elle prévisible, et par quels arguments ? Sur le document réponse, représenter par une flèche le champ magnétique en quelques-uns de ces points.

Q 37. Quelle équation de Maxwell exprime la conservation du flux de $\vec{B}$? En quoi cette propriété s'illustre-t-elle sur la carte fournie ? En utilisant les figures D et E, vous apporterez une réponse *quantitative* avec au moins deux valeurs numériques du champ à l'appui.

On s'intéresse à la ligne de champ $\mathcal{C}$ passant par les points D et E . De l'un à l'autre, elle traverse sur une longueur d'environ 12 cm une zone de champ très intense. Ailleurs au contraire, le champ paraît beaucoup plus faible.

Q 38. Les valeurs du champ observées le long de $\mathcal{C}$ sont-elles compatibles avec l'intensité circulant dans les bobines ?

Deux constatations se dégagent des figures D et E :

- dans la région située entre les bobines, le champ reste presque colinéaire à $\vec{u}_3$ si on ne s'éloigne pas trop de l'axe ;
- B_{axe} est presque uniforme dans la région délimitée par les bobines.

On se propose d'établir un lien entre ces deux observations.

Q 39. Considérons à titre d'exemple le point $A(x_{1A} = 5 \text{ cm}, x_{3A} = 20 \text{ cm})$, près duquel la ligne de champ est légèrement inclinée. Que valent $B_3(A)$ et $B_r(A)$? Ces valeurs sont-elles cohérentes avec l'inclinaison de la ligne de champ en A ? Une application numérique est attendue.

Q 40. En utilisant, au voisinage d'un point de l'axe (coordonnées (r, x_3) avec $r \ll R_1$), l'équation de Maxwell de la question 37, démontrer que

$$B_r(r, x_3) \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}.$$

Q 41. Cette relation est-elle satisfaite en A ?

Q 42. À partir des graphiques fournis, déterminer le facteur μ tel que

$$B_{\text{axe}}(0) = \mu N_1 i_1.$$

Conventionnellement, on considère que le champ est quasi-uniforme dans le cylindre de rayon r_{max} défini par les inégalités suivantes :

$$-\frac{R_1}{4} \leq x_3 \leq \frac{R_1}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \left| B_3\left(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}\right) - B_{\text{axe}}(0) \right| = \frac{1}{10} B_{\text{axe}}(0).$$

Q 43. Déterminer r_{max} et représenter ce cylindre sur la figure D.

IV.B – Exploitation du couplage électromagnétique

La bobine-sonde $\mathcal{C}_2$ présente un rayon R_2 et une inductance propre L_2 . Elle est formée de N_2 spires de cuivre, chacune parcourue par un courant d'intensité i_2 , enroulées dans le sens de rotation positif par rapport à $\vec{u}_z$. On suppose qu'elle reste entièrement dans la région où le champ créé par $\mathcal{C}_1$ est quasi-uniforme. On note L_1 l'inductance propre de $\mathcal{C}_1$ et on néglige les résistances de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Q 44. Rappeler la définition du coefficient de mutuelle induction M entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. L'exprimer en fonction de N_1 , N_2 , R_2 , μ et φ .

On applique une tension alternative $u_1 = U_{1m} \cos(\omega t)$ aux bornes de $\mathcal{C}_1$. La bobine $\mathcal{C}_2$ est connectée à un voltmètre de très grande impédance d'entrée.

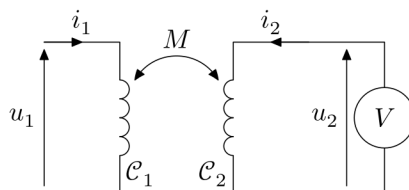


Figure 10

Q 45. Écrire les équations électriques régissant le fonctionnement de ces deux circuits, sans tenir compte, à ce stade, de la « très grande impédance » du voltmètre.

Q 46. À quelle simplification peut-on procéder en tenant compte de la « très grande impédance » du voltmètre ? En déduire une relation entre u_1 , u_2 , L_1 et M .

Q 47. Application numérique : $U_{1m} = 5,00 \text{ V}$, $U_{2m} = 170 \text{ mV}$, $L_1 = 3,6 \text{ mH}$, $R_2 = 5,0 \text{ cm}$, $N_1 = 50$, $N_2 = 200$. Calculer le coefficient de mutuelle induction M (en valeur absolue) et l'angle d'inclinaison φ (supposé positif) en degrés.

Sous-partie IV.A

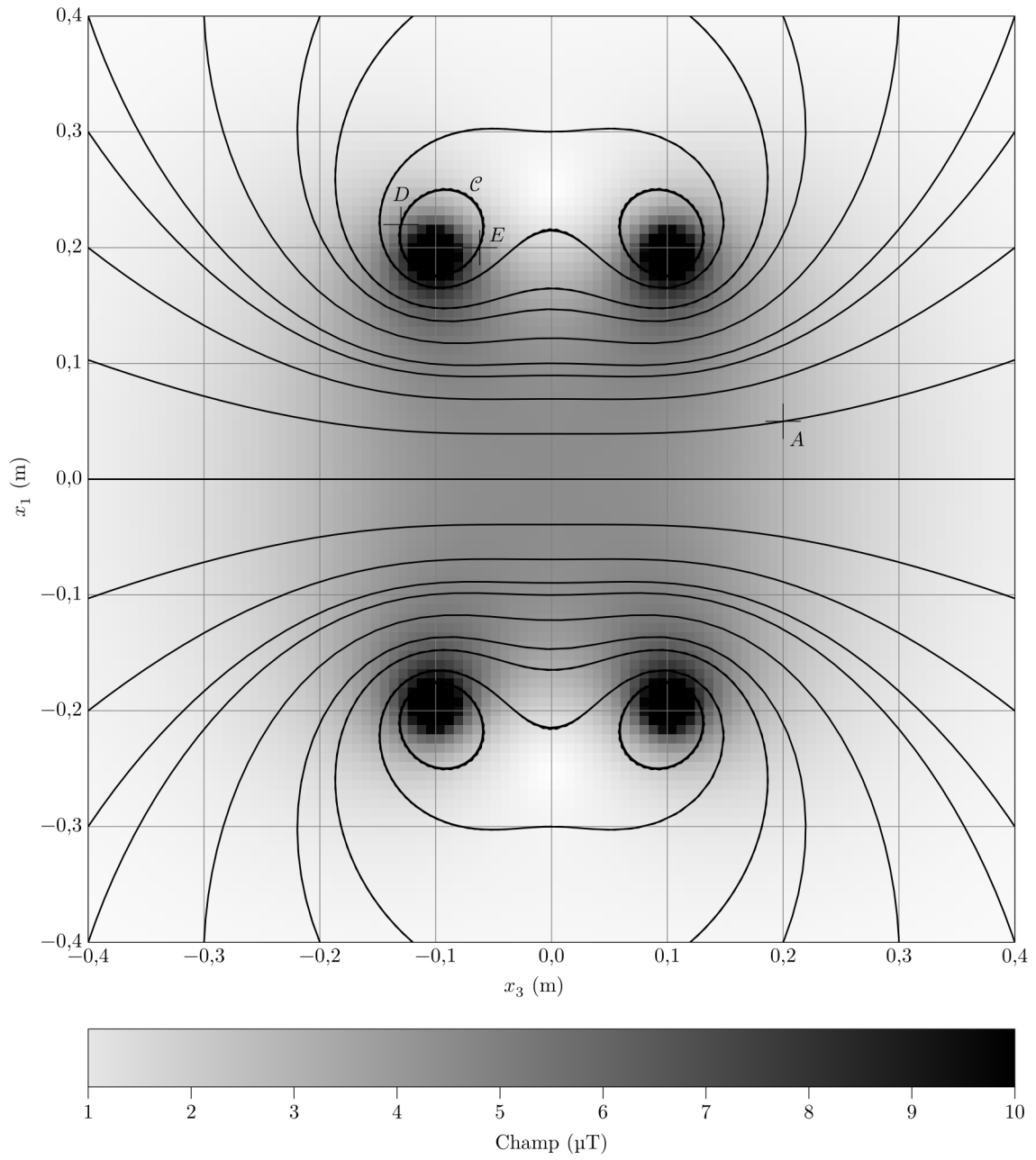


Figure D Carte de champ créé par des bobines de Helmholtz, dans le plan $(O_1, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$

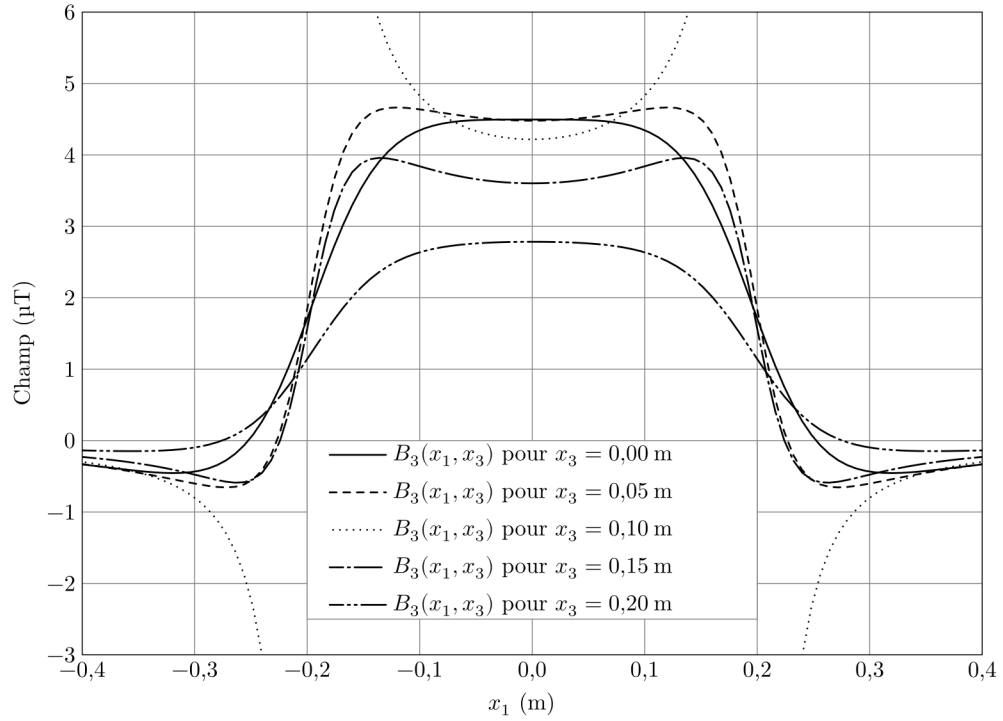
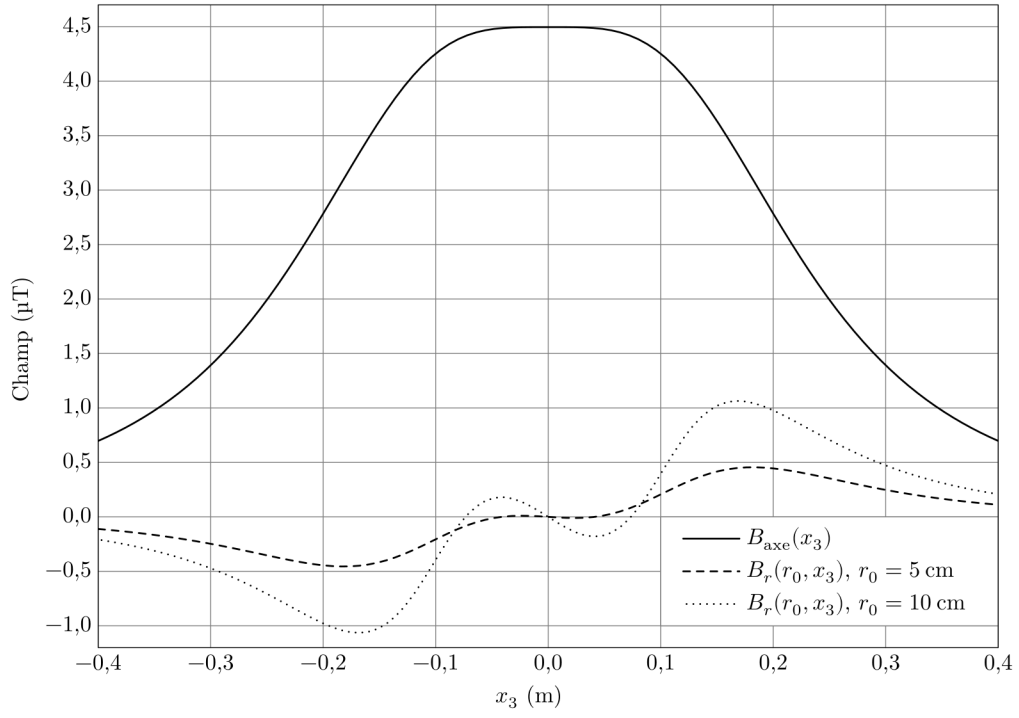


Figure E Profils du champ magnétique de long de certains segments. Sur le premier graphique, r est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la cote x_3 . Sur le second graphique, x_3 est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la coordonnée x_1 .