

Électromagnétisme 3

ARQS Magnétique

Compétences

- ❑ Établir la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.
- ❑ Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.
- ❑ Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.
- ❑ Relier la circulation du champ électrique à la dérivée temporelle du flux magnétique.
- ❑ Décrire la géométrie des courants de Foucault dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant.
- ❑ Exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre et expliquer le rôle du feuilletage.
- ❑ Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités.
- ❑ Déterminer, à partir de l'expression de l'énergie magnétique, l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans le cas d'une bobine modélisée par un solénoïde long.
- ❑ Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique.
- ❑ Établir, dans le cas de deux bobines couplées, l'inégalité $M^2 \leq L_1 L_2$.

Questions de cours des interrogations orales

- ❑ Énoncer les 4 équations de Maxwell et établir l'équation locale de conservation de la charge.
- ❑ Énoncer les équations de Maxwell dans l'ARQS. Établir la condition à laquelle on peut négliger les courants de déplacement.
- ❑ Établir l'expression du vecteur densité de courant puis de la puissance dissipée par les courants de Foucault dans un cylindre conducteur placé dans un champ magnétique uniforme et sinusoïdal.
- ❑ Établir le champ magnétique créé par un solénoïde puis son inductance propre.
- ❑ Sur l'exemple du solénoïde, établir l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique.
- ❑ A partir de l'expression des flux magnétiques, établir l'énergie stockée dans deux bobines en interaction puis établir une inégalité portant sur l'inductance mutuelle et les inductances propres.

Entraînements

- ❑ [5.2](#) ❑ [5.4](#) ❑ [5.5](#) ❑ [5.7](#) ❑ [5.8](#)

Exercices

- ❑ [Exercice 1](#) ❑ [Exercice 2](#) ❑ [Exercice 3](#) ❑ [Exercice 4](#) ❑ [Exercice 5](#) ❑ [Exercice 6](#)

Résumé du cours

1. ARQS magnétique

1.1. Conservation de la charge

Les équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation locale de conservation de la charge.

Équation locale de conservation de la charge

♥ $\mathcal{L}_1^1$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Avec

- j le vecteur densité volumique de courant (A m^{-2})
- ρ la densité volumique de charge (C m^3)
- t le temps (s)

1.2. Courants de déplacement

Le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ se nomme courant de déplacement. Son unité est A m^{-2} .

L'ARQS¹ magnétique consiste à négliger les courants de déplacement.

Équation de Maxwell dans l'ARQS

♥

Hypothèse : Dans l'ARQS magnétique

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Avec

- $\mathcal{E}$ l'énergie stockée (J)
- ρ la densité volumique de charge (C m^3)
- ε_0 la permittivité diélectrique du vide (F m^{-1})
- B le champ magnétique (T)
- t le temps (s)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (H m^{-1})
- j le vecteur densité volumique de courant (A m^{-2})

Condition d'application de l'ARQS

$\mathcal{L}_2^2$

$$\frac{\lambda}{\tau} \ll c$$

Avec

- λ longueur caractéristique du système (m)
- τ durée caractéristique de variation des grandeurs (s)

1.3. Du régime stationnaire au régime variable

Dans l'ARQS magnétique, les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère sont les mêmes qu'en stationnaire. Tous les résultats vus dans le chapitre « Champ magnétique en régime stationnaire » restent donc valables.

¹approximation des régimes quasi-stationnaire

Théorème d'Ampère



Hypothèse : Dans l'ARQS magnétique

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Avec

- B le champ magnétique (T)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (H m^{-1})
- $I_{\text{enlacé}}$ le courant électrique enlacé par la courbe d'Ampère (A)

1.4. Principe de l'ARQS

Dans l'ARQS, les courants créent des champs magnétiques (qu'on peut déterminer avec le théorème d'Ampère) qui induisent à leur tour des champs électriques (qu'on peut déterminer avec la loi de Maxwell-Faraday).

Dans l'ARQS, le champ magnétique induit le champ électrique.

2. Induction

2.1. Circulation du champ électrique

Circulation du champ électrique



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Avec

- $\mathcal{E}$ l'énergie stockée (J)
- Φ le flux du champ magnétique (T m^2)
- t le temps (s)

Dans le cas où $\mathcal{C}$ suit un circuit électrique, on obtient la loi de Lenz-Faraday.

Loi de Lenz-Faraday



$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Avec

- e la force électromotrice (V)
- Φ le flux du champ magnétique (T m^2)
- t le temps (s)

Application



Un circuit électrique carré de côté a comportant un condensateur de capacité C et un résistor de résistance R est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ qui lui est orthogonal. Représenter le circuit électrique équivalent.

2.2. Courant de Foucault

Lorsqu'un cylindre conducteur est placé dans un champ magnétique oscillant, des courants y apparaissent. Ces courants sont appelés courants de Foucault.

Courants de Foucault



Hypothèses :

- A l'intérieur du cylindre
- Dans l'ARQS
- Le cylindre est plongé dans un champ magnétique $B = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$

Avec

- $\mathcal{E}$ l'énergie stockée (J)
- B_0 l'amplitude du champ magnétique extérieur (T)
- ω la pulsation (rad s^{-1})
- t le temps (s)
- e la force électromotrice (V)

$$\vec{E} = \frac{1}{2} B_0 \omega r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

La présence d'un champ électrique dans un milieu conducteur entraîne la production de chaleur par effet Joule².

Densité volumique de puissance dissipée par effet Joule

Hypothèses :

- Dans un conducteur ohmique
- Dans l'ARQS

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \gamma E^2$$

Avec

- $\mathcal{P}_{\text{vol}}$ la densité volumique de puissance dissipée par effet Joule (W m^{-3})
- γ la conductivité électrique (S m^{-1})
- E le champ électrique (V m^{-1})

Puissance moyenne dissipée par les courants de Foucault

Hypothèses :

- Dans un conducteur ohmique
- Dans l'ARQS

$$P_{\text{moy}} = \frac{\pi \gamma B_0^2 \omega^2 h a^4}{16}$$

Avec

- γ la conductivité électrique (S m^{-1})
- B le champ magnétique (T)
- ω la pulsation (rad s^{-1})
- h la hauteur du cylindre (m)
- a le rayon du cylindre (m)

Application

Le fond d'une casserole en fer ($\gamma_{\text{Fe}} = 1 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$) a un rayon de 15 cm et une épaisseur de 1 cm. La casserole est posée sur une plaque à induction qui émet un champ magnétique oscillant à la fréquence 20 kHz. Quelle amplitude doit avoir le champ magnétique pour que la puissance apportée à la casserole soit de 1 kW ?

2.3. Intérêt du feuilletage

Dans les transformateurs et dans les moteurs, des pièces métalliques sont placées dans des champs magnétiques variables et sont donc le siège de courants de Foucault. Ces courants de Foucault représentent des pertes qu'on souhaite limiter.

Pour limiter les pertes par courant de Foucault, on utilise le **feuilletage**. Le feuilletage consiste à découper la pièce métallique en feuillets séparés par de l'isolant électrique afin d'empêcher les courants de Foucault de circuler. Le feuilletage doit être effectué dans une direction orthogonale aux courants de Foucault.

²Les détails de cette production de chaleur seront étudiés dans le chapitre « Transport de charge ».



Fig. 1. – Transformateur et rotor d'un moteur électrique dont le feuilletage est visible.

3. Inductance propre, inductance mutuelle

3.1. Cas du solénoïde

Champ magnétique et flux pour un solénoïde

Hypothèses :

- Les effets de bord sont négligés.
- Le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde est nul.
- Le solénoïde est assimilé à une succession de spires resserrées et d'espacement constant.

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{e}_x$$

$$\Phi = \pi R^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} i$$

Avec

- B le champ magnétique (T)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (H m^{-1})
- i l'intensité du courant (A)
- e la force électromotrice (V)
- Φ le flux du champ magnétique (T m^2)

Le flux magnétique propre est proportionnel au courant. Cette propriété peut être généralisée. Le coefficient de proportionnalité est l'inductance propre.

Inductance propre

$$\Phi = Li$$

Avec

- Φ le flux du champ magnétique (T m^2)
- L l'inductance propre (H)
- i l'intensité du courant (A)

Application

Calculer l'inductance propre d'un solénoïde de 10 cm de long et de 1 cm de rayon comportant 1 000 spires.

Relation tension-courant pour une bobine

♥ 11

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

Avec

- u_L la tension aux bornes de la bobine (V)
- L l'inductance propre (H)
- i l'intensité du courant (A)
- t le temps (s)

3.2. Énergie stockée

Énergie stockée dans une bobine

♥ 12

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2$$

Avec

- $\mathcal{E}$ l'énergie stockée (J)
- L l'inductance propre (H)
- i l'intensité du courant (A)

Dans l'exemple d'un solénoïde, l'énergie stockée s'écrit $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu_0 \pi R^2 \frac{N^2}{L} i^2$. On peut utiliser cette expression pour exprimer la densité volumique d'énergie magnétique.

Densité volumique d'énergie magnétique

♥ 13

Hypothèse : L'expression obtenue pour un solénoïde peut être généralisée.

$$w = \frac{1}{2} \mu_0 B^2$$

Avec

- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (H m^{-1})
- B le champ magnétique (T)

3.3. Inductance mutuelle

Lorsque deux bobines sont présentes simultanément, le champ magnétique créé par l'une peut induire une tension dans l'autre. Ce phénomène s'appelle **induction mutuelle**.

Flux magnétique

♥

$$\Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2$$

Avec

- Φ_1 le flux magnétique sur la bobine 1 (T m^2)
- $\Phi_{1 \rightarrow 1}$ le flux propre de la bobine 1 (T m^2)
- $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ le flux mutuel induit par la bobine 2 sur la bobine 1 (T m^2)
- L_1 l'inductance propre de la bobine 1 (H)
- i_1 l'intensité du courant circulant dans la bobine 1 (A)
- M l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 (H)
- i_2 l'intensité du courant circulant dans la bobine 2 (A)

L'inductance mutuelle M dépend de la géométrie et de la position relative des deux bobines. Si les bobines sont infiniment éloignées, $M = 0$.

Énergie stockée dans deux bobines en interaction

♥ 14

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}L_1(i_1)^2 + \frac{1}{2}L_2(i_2)^2 + Mi_1i_2$$

Avec

- $\mathcal{E}$ l'énergie stockée (J)
- L_1 l'inductance propre de la bobine 1 (H)
- i_1 l'intensité du courant circulant dans la bobine 1 (A)
- L_2 l'inductance propre de la bobine 2 (H)
- i_2 l'intensité du courant circulant dans la bobine 2 (A)
- M l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 (H)

En plus de l'énergie stockée dans chacune des bobines $\frac{1}{2}L_1i_1^2$ et $\frac{1}{2}L_2i_2^2$, un troisième terme Mi_1i_2 correspondant à l'interaction des bobines apparaît.

Valeur limite de l'inductance mutuelle

♥ 15

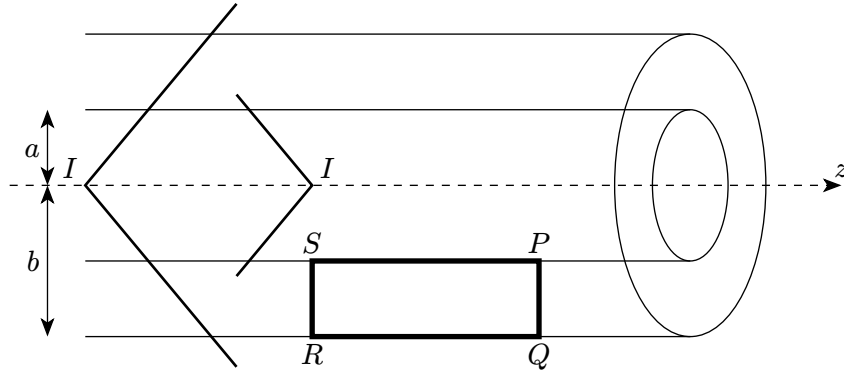
$$M \leq \sqrt{L_1L_2}$$

Avec

- M l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 (H)
- L_1 l'inductance propre de la bobine 1 (H)
- L_2 l'inductance propre de la bobine 2 (H)

Exercices

1. Inductance d'un câble coaxial



Un câble coaxial, considéré comme infiniment long et placé dans un milieu de perméabilité magnétique μ_0 , est formé de deux armatures cylindriques de même axe (O, z) . L'armature intérieure (l'âme) est un cylindre **creux** de rayon a . L'armature extérieure (la gaine) est un cylindre **creux** de rayon b . Le courant continu d'intensité I qui circule dans l'âme, dans le sens de $+\vec{e}_z$, revient avec la même intensité dans la gaine selon $-\vec{e}_z$. Ce câble constitue un circuit fermé.

À un point M de l'espace, on associera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base cylindrique directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1/ Déterminer l'orientation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point M quelconque de l'espace.

2/ Déterminer $\vec{B}(M)$ pour un point intérieur à l'âme ($r < a$), ou extérieur à la gaine ($b < r$).

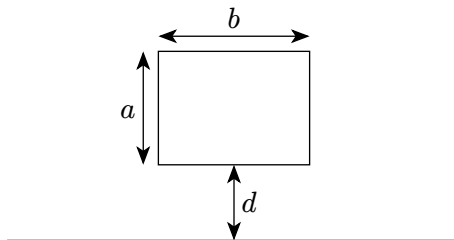
3/ Exprimer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble en tout point M situé à la distance r de son axe, $a < r < b$.

4/ Déterminer le flux de $\vec{B}(M)$ à travers une surface rectangulaire $PQRS$ correspondant à une longueur l du câble, orientée dans le sens de $+\vec{e}_\theta$.

5/ Rappeler l'expression générale qui lie le flux de $\vec{B}(M)$ à l'inductance propre (ou coefficient d'auto-inductance) et en déduire l'inductance L d'une longueur l du câble en fonction de μ_0 , l , a et b .

6/ Effectuer l'application numérique pour un câble standard, où $l = 1 \text{ m}$, $a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ et $b = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

2. Mutual inductance between a wire and a frame

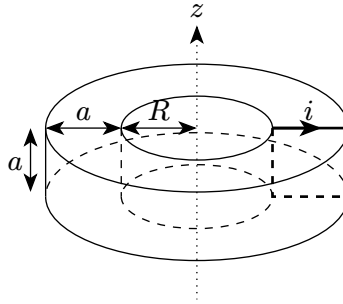


We study an infinite electric wire and a conductive frame. The two objects are coplanar. The bottom of the frame is at a distance d of the wire.

1/ Ascertain the mutual inductance between the two circuits.

3. Inductance propre d'un tore

On considère un tore de rayon interne R , de section carrée de côté a , sur lequel on enroule un fil en formant N spires carrées jointives.



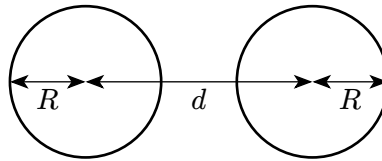
L'espace est repéré par le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, l'origine étant prise sur l'axe du tore. Chaque spire carrée appartient à un plan passant par l'axe.

Le circuit ainsi constitué est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$, orienté selon le sens indiqué sur la figure.

On se place dans le cadre de l'ARQS.

- 1/ Calculer le champ magnétique créé par le courant d'intensité $i(t)$ dans tout l'espace.
- 2/ En déduire l'expression de l'inductance propre L . Calculer numériquement L pour $N = 100$ et $N = 1000$. On donne $a = 1 \text{ cm}$ et $R = 5 \text{ cm}$.

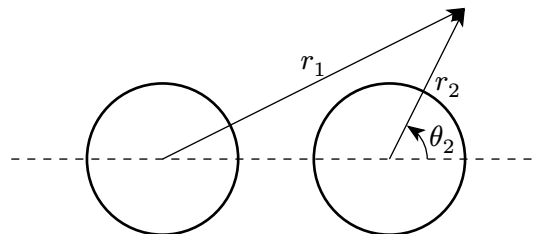
4. Inductance mutuelle entre deux spires



On cherche à calculer numériquement l'inductance mutuelle entre deux spires circulaires coplanaires de même rayon R , séparées par une distance d . On se place dans le régime quasi-stationnaire.

- 1/ Déterminer les invariances du champ magnétique créé par une des spires.
- 2/ Quelle est la direction du champ magnétique dans le plan des spires ?

On peut approximer le champ magnétique créé par la spire 1, parcourue par un courant I_1 par celui d'un dipôle magnétique : $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pi R^2 I_1}{r_1^3}$, où r_1 est la distance au centre de la spire 1.



- 3/ Exprimer r_1 en fonction de r_2 , θ_2 et d . On pourra remarquer que $\overrightarrow{O_1 M} = \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 M}$.
- 4/ Montrer que le flux du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers la spire 2 est donné par $\Phi_{1 \rightarrow 2} = A \int_0^{2\pi} d\theta_2 \int_0^R dr_2 \frac{r_2}{(d^2 + r_2^2 + dr_2 \cos \theta_2)^{\frac{3}{2}}}$

La fonction `dblquad` de la bibliothèque `scipy.integrate` permet de calculer numériquement des intégrales doubles. Son appel est de la forme `dblquad(func, a, b, c, d)`, où `func(x,y)` est la fonction à intégrer pour x allant de a à b et pour y allant de c à d . `dblquad` retourne un couple dont le premier élément est la valeur de l'intégrale.

5/ Compléter le programme Python sur Capytale (code [6e41-7604729](#)) pour calculer numériquement l'inductance mutuelle.

6/ Tracer sur Capytale l'évolution de l'inductance mutuelle M en fonction de la distance d entre les deux spires. On prendra 20 points avec d variant de $5R$ à $50R$.

5. 🤖 Entrée dans un IRM

Cet exercice est un problème ouvert. Il nécessite de prendre des initiatives et de faire des choix dans la modélisation. Des approximations et des estimations sont souvent nécessaires pour arriver à une solution.



Le champ magnétique dans un IRM est stationnaire et de l'ordre de 1 T . La conductivité électrique du corps humain est de l'ordre de 0.2 S m^{-1} .

Lors de l'entrée dans la machine, le patient se déplace à une vitesse d'environ 0.2 m s^{-1} .

La chaleur dégagée par les courants de Foucault lors de l'entrée dans la machine est-elle dangereuse ?

6. 💬 J'explique à mon père : Le chargeur à induction

Le but de cet exercice est de vous faire expliquer un concept/phénomène avec des mots simples et courants (pas de vocabulaire technique ou scientifique) à une personne de votre entourage. Tachez de faire simple et court, utilisez des analogies avec des choses connues. Vous pouvez vous inspirer de Ma thèse en 180 secondes. Profitez-en pour prendre des nouvelles !

Comment ça fonctionne un chargeur sans fil (chargeur à induction) de téléphone portable ?