PSI **Novembre 2016**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Exercice 1. Déterminer les éléments propres de :

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
2. l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = E_{12}ME_{21}$ où $(E_{ij})_{i,j}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exercice 2. : Déterminer a pour que 2 soit valeur propre $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3. (CCP 2015)
On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que Φ défini par $\Phi(f)(x) = f'(x) - xf(x)$ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer ses valeurs propres et ses sous espaces propres.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(\Phi^2)$.

Exercice 4. (ENSAM 2015)
Pour f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Est-il surjectif ? Injectif ?
3. Donner ses éléments propres.

Exercice 5. : Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A^8 + A^2 + I_3 \neq 0$.

Exercice 6. : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0$ et $Tr(A) = 9$.
Déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.

Exercice 7. (CCP 2015) Soient E un espace vectoriel et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Soit $\lambda \neq 0$ valeur propre de $v \circ u$. Montrer que λ est valeur propre de $u \circ v$.
2. Montrer que si E est de dimension finie, le résultat reste vrai pour $\lambda = 0$.
3. On choisit $E = \mathbb{R}[X], u(P) = P', v(P) = Q$ où Q est la primitive de P nulle en 0. Calculer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Conclusion ?

Exercice 8. : Soient $n \in \mathbb{N}^*, A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + C = B + D$.
On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Exprimer χ_M comme produit de deux polynômes de degré n.

Exercice 9. : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que A et B n'ont pas de valeur propre commune. Soit χ_A le polynôme caractéristique de A.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MB \Longleftrightarrow M = 0$.
3. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ M = AN - NB$.

Exercice 10. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & xI_n \end{pmatrix}$.
2. En déduire que $Sp(AB) = Sp(BA)$

Exercice 11. (Mines) On note P l'ensemble des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $T > 0$, justifier la légitimité de l'endomorphisme u défini sur P par :

$$\forall f \in P, \forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)dt$$

Montrer que u est un automorphisme et donner son spectre.

Exercice 12. (Mines) Montrer que λ est valeur propre de la matrice A dont les coefficients de la diagonale sont $1, 2, \cdots, n$ et tous les autres valent 1, si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda - k} = 1$. En déduire que A admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 13. (Centrale)

1. Calculer $D(t) = \begin{vmatrix} a+t & c+t & \cdots & c+t \\ b+t & a+t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+t \\ b+t & \cdots & b+t & a+t \end{vmatrix}$ où $b \neq c$ et $bc \neq 0$
2. En déduire le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.
3. Donner les valeurs propres de M.

Exercice 14. (Mines 2012) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.