PSI **0ctobre 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Eléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Exercice 1. *Pour vous entraîner en calcul* Eléments propres de

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_1}(X) = (X-1)^3,\ E_1(A_1) = Vect((1,-2,1)$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_2}(X) = X(X-1)(X-2),\ E_0(A_2) = Vect((1,-1,1)), E_1(A_2) = Vect((0,1,0)), E_2(A_2) = Vect((-1,1,1))$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_3}(X) = (X-4)(X-1)^2,\ E_1(A_3) = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)), E_4(A_3) = Vect((1,1,1),$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_4}(X) = (X-1)(X-2)^2,\ E_1(A_4) = Vect((4,-4,1)),\ E_2(A_4) = Vect((2,-3,1))$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_5}(X) = (X+1)(X-1)^2,\ E_{-1}(A_5) = Vect(1/2*a,-1,1),\ E_{-1}(A_5) = Vect((1,0,0))$.
6. $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_9}(X) = X^3(X-10),\ E_0(A_9) = Vect((-4,0,0,1),(-2,1,0,0),(-3,0,1,0))$, $E_{10}(A_9) = Vect((1,1,1,1))$.

Exercice 2. Eléments propres de :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$
2. L'endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $\Psi : f \mapsto f''$.
3. f défini par $f((u_n)_n) = (v_n)_n$ où $v_n = u_{n+1} - u_n$.
4. f défini par $\forall P \in \mathbb{K}_3[X], f(P)(X) = X^3 P(\frac{1}{X})$.
5. $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \operatorname{tr}(M) I_n$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3, a \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} a & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 3. *Matrice compagnon*

1. Soit $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Donner le polynôme caractéristique de :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que tout polynôme unitaire P est polynôme caractéristique d'une matrice. On appelle cette matrice, la matrice compagnon de P.

Exercice 4. :(CCINP 2021) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} 2A & 3A \\ 5A & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celeui de A

Exercice 5. Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2,f, l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, déterminer le noyau, l'image et les éléments propres de f.

Exercice 6. On considère l'endomorphisme T de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], T(P) = (3X + 8)P + (X^2 - 5X)P' - (X^3 - X^2)P''$$

1. Etablir que si P est un vecteur propre de T, alors $deg(P) = 3$.
2. En déduire les éléments propres de T.
3. Montrer que si X a un antécédent P par T, alors $deg(P) \leq 3$.
4. T est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 7. (ENSAM , Centrale)
Pour f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, on pose $T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Est-il surjectif ? Injectif ?
3. Donner ses éléments propres.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$.

1. Montrer que $\forall k, A^k B - BA^k = kA^k$
2. Montrer que , pour tout $k \geq 0$, si $A^k \neq 0$, A^k est vecteur propre de $u : M \longmapsto MB - BM$.
3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 9. Montrer que le spectre d'une matrice A de rang 1 est $\{0, \operatorname{tr}(A)\}$.

Exercice 10. 1. Déterminer sans calcul les valeurs propres de : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer les sous espaces propres de A.
3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $M^2 + M = A$.

Exercice 11. Une matrice carrée réelle est dite stochastique lorsque ses coefficients sont positis et que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

1. Donner deux exemples de matrices stochastiques d'ordre 2.
2. Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si $M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
4. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.
   (a) Montrer que 1 est valeur propre de M.
   (b) Montrer que le spectre de M est inclus dans le disque $\{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$.
   (c) On suppose que les coefficients de M sont non nuls. Prouver que 1 est la seule valeur propre de module 1.