PSI **Mars 2023**
MATHEMATIQUES

Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien.

Exercice 1. On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $D = \text{Vect}\left((1,1,1)\right)$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $D : x-y+z=0, x+y+z=0$ qui transforme e_2 en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$.

Exercice 2. (Ecrit E3A PSI 2020) Soient E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.
On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des variables.

1. Soient $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \text{id}_E$?

Exercice 3. Pour $n \geq 2$, on munit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $< M, N >= \text{tr}\,({}^tM\,\mathbb{N})$. Déterminer les réels a et b de sorte que $f : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) aM + b{}^tM$ soit une isométrie vectorielle.

Exercice 4. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $I_n + A$ est inversible, puis que $P = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est une matrice orthogonale.

1. Montrer que $P + I_n$ est inversible.
2. Réciproquement, si P est une matrice orthogonale n'admettant pas -1 comme valeur propre, montrer que P peut s'écrire sous la forme :$(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ avec A une matrice antisymétrique.

Exercice 5. 1. Soit $\mathscr{B}$ une base d'un espace euclidien E et soit C l'orthonormalisée de Schmidt de B . Que dire de la matrice de passage de C à B ?

2. Montrer que, pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs telles que $A = QR$.
3. Démontrer que le couple (Q, R) est unique.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A = (a_{ij})$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.
2. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$.

Exercice 7. Etant donné $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, déterminer le polynôme caractéristique de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que ${}^tAA = A^tA$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 9. Soit E euclidien de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme autoadjoint défini positif.

1. S étant la sphère de E, déterminer le minimum sur S de l'application
$$f : x \longmapsto < u(x), x >< u^{-1}(x), x >$$
2. En quels points de S, ce minimum est-il atteint ?

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $R \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $B = R^2$.
2. En déduire AB est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que ${}^tAA$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.
2. On note $\mathrm{Sp}\,{}^tAA) = \{s_1, \cdots s_n\}$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2$

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})\ \forall S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ |\mathrm{tr}\,(\Omega S)| \leq \mathrm{tr}\,(S)$.
2. Montrer que $\forall S \in S_n \setminus \{0\},\ \mathrm{rg}\,(S) \geqslant \frac{(\mathrm{tr}\,(S))^2}{\mathrm{tr}\,(S^2)}$.