PSI **Avril 2024**
MATHEMATIQUES

TD : Équations différentielles

1 Révisions de PCSI

Exercice 1. 1. Soient $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ De^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (C, D) pour que f se prolonge par continuité en 0.

(b) Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2. On considère l'équation différentielle

$$x^2y' - y = 0$$

Résoudre cette équation sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Méthode : Utiliser un changement de fonction inconnue.*
Résoudre

$$2xe^yy' + e^y = x^2$$

2 Systèmes différentiels

Exercice 3. Résoudre le système différentiel (H) suivant sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t}y + 1 \\ y' = \frac{1}{t}x + 1 \end{cases}$$

indication : poser $u = x + y, v = x - y$.

Exercice 4. 1. Montrer que $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Résoudre le système différentiel (H) suivant :

$$\begin{cases} x' = 6x + 2y \\ y' = 2x + 3y \\ z' = -10x + 5y + 2z \end{cases}$$

3. Quelle est la structure de l'espace des solutions ?

3 Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 5. Retour sur dm5 Sujet 1.
On définit l' équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E) : y'' + \pi y = \frac{\pi}{x}$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer le résultat de cours suivant : Si y_p est une solution de (E), alors toute solution y de (E) s'écrit : $y = h + y_p$ où h est une solution de l'équation différentielle homogène associée à (E).
3. On pose $y_0 : x \mapsto \cos(\pi x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(\pi t}{t} \,\mathrm{d}t - \sin(\pi x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\pi t}{t} \,\mathrm{d}t$. Vérifier que y_0 est solution de (E).
4. Soit $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\pi x t}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que H est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que H est solution de (E).
   (c) Justifier qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x > 0, H(x) = a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x) + \cos(\pi x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\pi t}{t} \,\mathrm{d}t - \sin(\pi x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\pi t}{t} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 6. Résoudre (E) : $tx'' + 2(t+1)x' + 2x = 1 - e^{-2t}$ en cherchant une solution de l'équation homogène sous la forme $t \longmapsto t^\alpha$.

Exercice 7. Soit $(E) : 4xy'' + 2y' - y = 0$

1. Chercher une solution de (E) développable en série entière.
2. En déduire la résolution de (E).

Exercice 8. Méthode : Utiliser un changement de fonction inconnue.
Résoudre $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$ à l'aide du changement de fonction inconnue $z = y' - y$.

Exercice 9. Méthode : Utiliser un changement de variable (et donc de fonction inconnue).
Résoudre $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ en posant $x = \pm e^t$.

4 Utilisant le théorème de Cauchy-Scwharz

Exercice 10. (d' après une question de CCINP 21) Pour $z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| < 1$, Résoudre sur $[0,1]$:

$$\begin{cases} y' = \frac{z_0}{1+tz_0} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 11. Soit p et q deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose p impaire et q paire et on considère l'équation différentielle : $(H)\ y'' + py' + qy = 0$.

1. Montrer qu'il existe une et une seule solution y_1 de (H) telle que : $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_1 paire$.
2. Montrer qu'il existe une et une seule solution y_2 de (H) telle que : $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1, y_2 impaire$.
3. Montrer que (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (H).

5 Plus théorique

Exercice 12. Soit $a : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que les solutions de $y' - a(x)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13. Soit a une apllication continue définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) \neq 0$ alors f s'annule au plus un fois sur I.

Exercice 14. Lemme de Gromwall
Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) \geq 0 \text{ et } f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$$

En considérant une inéquation différentielle satisfaite par $F(x) = \int_0^x f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t) \leq a\,exp\left(\int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)$$