PSI **Décembre 2016**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Espaces Probabilisés

Exercice 1. : Montrer que l'ensemble des entiers pairs puis celui des entiers impairs sont dénombrables.

Exercice 2. : Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites dont les termes sont soit 0, soit 1.

Supposons qu'il existe une bijection f entre $\mathbb{N}$ et Ω.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $f(n)$ est une suite d'éléments de 0 et 1. On note $(f(n))_n$ son $n^{\text{ième}}$ terme. On définit alors la suite $(\omega_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = 1 - (f(n))_n$$

En considérant l'antécédent de $(\omega_n)_n$ par f, obtenir une contradiction. Qu'en déduit-on alors ?

Exercice 3. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux àă deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 4. : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 5. : L'information »Elvis Presley est encore en vie « est transmise de proche en proche parmi n personnes de la personne 1 à la personne n. Chaque personne i de cette chaîne humaine transmet l'info reçue avec une proba p et l'info contraire avec la proba 1-p. On souhaite déterminer la proba p_n que la personne n reçoise l'info »Elvis Preslez est encore en vie « Déterminer p_1, p_2, p_3(faire un arbre) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n En déduire $\underset{n\to+\infty}{lim}\ p_n$

Exercice 6. : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 7. : Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On en tire successivement n, en remettant, chaque fois, la boule tirée. Quelle est la probabilité que le nombre de boules blanches obtenues soit pair.

Exercice 8. : Soit $(x_n)_n$ une suite de réels satisfaisant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 0$.
Soit Ω un ensemble dénombrable, noté $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$.
Existe-t-il une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = P(\{\omega_n\})$?

Exercice 9. : On lance un dé équitable 3 fois de suite. Les numéros obtenus successivement sont notés a, b et c.

1. Calculer la probabilité que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
   (a) (i) ait 2 racines réelles distinctes.
   (b) (ii) n'ait pas de racines réelles.
2. On pose $P(x) = ax^2 + bx + c = 0, x \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité que P' divise P.
3. (a) (i) Calculer la probabilité de l'évènement E : ´ $x - a$divise$x^2 + bx + c$ ˇ.
   (b) (ii) Même question avec l'évènement F : ´ $x + a$divise$x^2 + bx + c$ ˇ..

Exercice 10. : Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Paul et Jacques. Quelle est la probabilité que Paul soit séparé de Jacques par m personnes ?

Exercice 11. :On considère n sacs $S_1, S_2, \cdots, S_n$.
Le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons rouges. On choisit un sac. La probabilité que le sac S_k soit choisi est égale à $k\alpha$. On tire ensuite un jeton au hasard dans le sac choisi.
1. Trouver la valeur de α.
2. Sachant que le jeton tiré est rouge, déterminer la probabilité qu'il provienne du sac S_k.

Exercice 12. : Deux joueurs $J1$ et $J2$ jouent avec deux dés non pipés.
J1 gagnera en amenant un total de 7 et J2 gagnera en amenant un total de 6.
J2 joue le premier et ensuite (si il y a une suite) J_1 et J_2 jouent alternativement.
Le jeu s'arrête dès que l'un d'entre eux gagne.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :
- C_i :« J1 amène 7 au $i^{\text{ème}}$ lancer »et D_i :« J2 amène 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
- $G_{1,n}$:« J1 gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer »et $G_{2,n}$:« J2 gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer »
- G_1 :« J1 gagne »et G_2 :« J2 gagne »

1. Calculer la probabilité des événements C_i et D_i pour tout i.
2. Calculer la probabilité des événements $G_{1,n}$ et $G_{2,n}$ pour tout n.
3. En déduire la probabilité de succès de chacun des joueurs.

Exercice 13. : Un gendarme va constater une suite illimitée d'infractions sur l'autoroute.
Chaque infraction peut être sanctionnée par une verbalisation ou un avertissement.
Il décide qu'il tirera au sort (avec une pièce de monnaie non truquée) la sanction pour la première infraction. Puis pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
- si pour la p-ième infraction constatée il verbalise, alors la $p+1$-ième fera l'objet d'un avertissement.
- si la p-ième infraction constatée fait l'objet d'un avertissement, alors il tire au sort pour la $p+1$-ième.

On note V_p l'événement :« la p-ième infraction constatée fait l'objet d'une verbalisation ». a_p sa probabilité et b_p celle de $\bar{V}_p$.

1. Exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p.
2. En déduire a_p et b_p pour tout p.
3. Déterminer la probabilité que ce gendarme ne fasse jamais de verbalisation.

Exercice 14. : On lance n pièces de monnaie, la probabilité que la k-ième pièce amène pile valant $\dfrac{1}{2k+1}$. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de Piles ?